PROVA SCRITTA DI MATEMATICHE SUPERIORI DEL 26/4/2000

Cognome **Nome** **Matr.**

1) Sia **P** il seguente programma lineare:

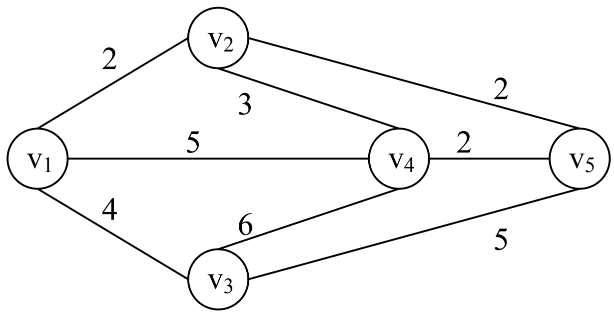
$$\begin{aligned} \min \quad & z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 = 1 \\ & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq -2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

a - Risolvere **P** con l'algoritmo del simplesso, facendo entrare in base la variabile più in alto e facendo uscire di base la variabile più a sinistra.

b - Determinare tutte le soluzioni ottimali di **P**.

TEMPO SUGGERITO 25m
PUNTEGGIO 14

2) Sia dato il seguente grafo non orientato, dove i numeri indicano i costi degli archi:



Determinare uno spanning tree di costo minimo con l'algoritmo di Prim, analizzando i vertici e gli archi in ordine di indice crescente, riportando ordinatamente gli archi aggiunti ad ogni iterazione.

TEMPO SUGGERITO 10m
PUNTEGGIO 6

3) Determinare gli equilibri di Nash in strategie pure e miste del seguente gioco non cooperativo in forma strategica:

I \ II	L	R
T	2, 0	0, 1
B	0, 5	3, 4

TEMPO SUGGERITO 15m
PUNTEGGIO 10

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 26/4/2000

1a) La tabella associata al problema lineare è:

	x_1	x_2	x_3	
v	-1 *	-1	0	1
u	2	2	-1	2
-z	-3	-2	1	0

	v	x_2	x_3	
x_1	-1	-1 *	0	1
u	-2	0	-1	4
-z	3	1	1	-3

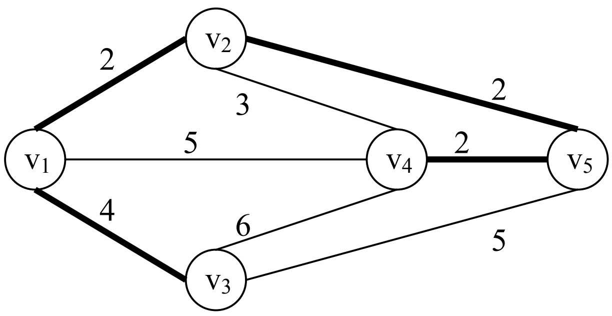
	v	x_1	x_3	
x_2	-1	-1	0	1
u	-2	0	-1 *	4
-z	2	-1	1	-2

	v	x_1	u	
x_2	-1	-1	0	1
x_3	-2	0	-1	4
-z	0	-1	-1	2

La tabella è ottimale e la soluzione è $x^* = (0, 1, 4)$; $z^* = -2$.

1b) Apparentemente il problema può avere ulteriori soluzioni ottimali, per la presenza di un termine nullo tra i coefficienti di z, ma tale termine corrisponde ad un vincolo di uguaglianza, per cui la variabile v può avere solo valore nullo.

2) Si aggiungono ordinatamente gli archi a_{12}, a_{25}, a_{45}, a_{13}, ottenendo il seguente albero:



3) Il gioco non ha equilibri di Nash in strategie pure (le migliori risposte sono sottolineate):

I \ II	L	R
T	$\underline{2}$, 0	0, $\underline{1}$
B	0, $\underline{5}$	$\underline{3}$, 4

Inoltre dette (p, 1-p) e (q, 1-q) le strategie miste di I e II, si ha:

$v_I(p) = (5q - 3)p - 3q + 3 = 0 \Rightarrow q = 3/5$

$v_{II}(q) = (1 - 2p)q - 3p + 4 = 0 \Rightarrow p = 1/2$

Quindi il gioco ha un equilibrio di Nash in strategie miste:

((1/2, 1/2), (3/5, 2/5))

ERRORI FREQUENTI
Gli esercizi 2 e 3 non hanno presentato nessuna particolare difficoltà per nessuno dei candidati, salvo "errori di stampa".
L'esercizio 1 invece ha creato qualche problema a più candidati.
Innanzitutto non tutti hanno seguito la strada più semplice di "forzare" l'entrata in base del vincolo di uguaglianza, ma ha usato il metodo del problema ausiliario o la riduzione alla forma canonica.
Ma l'errore più grave è quello di considerare il vincolo di uguaglianza fuori base ammissibile se il termine noto corrispondente è non negativo, mentre l'unico valore ammissibile per un vincolo di uguaglianza è zero.