

**PROVA SCRITTA DI MATEMATICHE SUPERIORI DEL 6/12/2000**

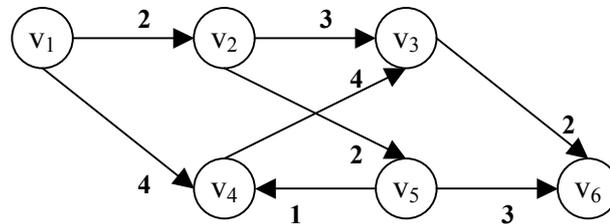
1) Sia dato il seguente problema lineare a variabili 0-1 **P**:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \leq 1 \quad (*) \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_4 \leq -1 \quad (**) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- Scrivere il rilassamento surrogato  $\mathbf{P}_S$ , rilassando il vincolo (\*) con moltiplicatore  $\pi_1 = 2$  e il vincolo (\*\*) con moltiplicatore  $\pi_2 = 1$ .
- Risolvere il problema  $\mathbf{P}_S$  con semplici considerazioni, riportandole.
- Dire se la soluzione ottenuta per  $\mathbf{P}_S$  è ottimale per  $\mathbf{P}$ , giustificando la risposta.

TEMPO SUGGERITO: 15m  
PUNTEGGIO 10

2) Sia data la seguente rete di trasporto:



Determinare un flusso massimo, utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Si esaminino i nodi e gli archi per indici crescenti. Completare la soluzione indicando gli archi che formano il taglio ottimo e verificarne la capacità.

TEMPO SUGGERITO 20m  
PUNTEGGIO 12

3) Si consideri la seguente situazione:

Il consiglio di amministrazione di una società è composto da 4 azionisti che possiedono rispettivamente le seguenti percentuali di azioni 10, 11, 30, 49 e la maggioranza richiesta è del 51%.

Calcolare l'indice di Banzhaf - Coleman normalizzato.

TEMPO SUGGERITO 15m  
PUNTEGGIO 8

**PROVA SCRITTA DI RICERCA OPERATIVA DEL 6/12/2000**

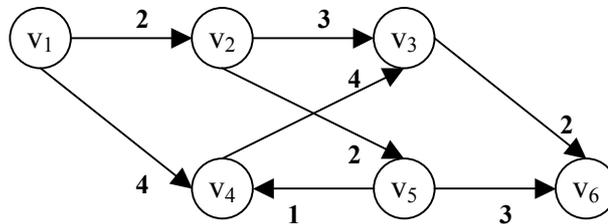
1) Sia dato il seguente problema lineare a variabili 0-1 **P**:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \leq 1 \quad (*) \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_4 \leq -1 \quad (**) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- a) Scrivere il rilassamento surrogato **P<sub>S</sub>**, rilassando il vincolo (\*) con moltiplicatore  $\pi_1 = 2$  e il vincolo (\*\*) con moltiplicatore  $\pi_2 = 1$ .
- b) Risolvere il problema **P<sub>S</sub>** con semplici considerazioni, riportandole.
- c) Dire se la soluzione ottenuta per **P<sub>S</sub>** è ottimale per **P**, giustificando la risposta.

TEMPO SUGGERITO: 15m  
PUNTEGGIO 14

2) Sia data la seguente rete di trasporto:



- a) Determinare un flusso massimo, utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Si esaminino i nodi e gli archi per indici crescenti.
- b) Completare la soluzione indicando gli archi che formano il taglio ottimo e verificarne la capacità.

TEMPO SUGGERITO 20m  
PUNTEGGIO 16

**SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 6/12/2000**

1a) Il rilassamento richiesto è:

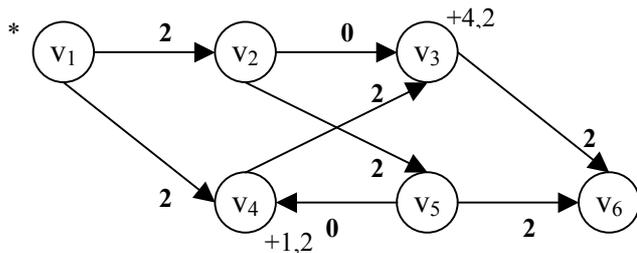
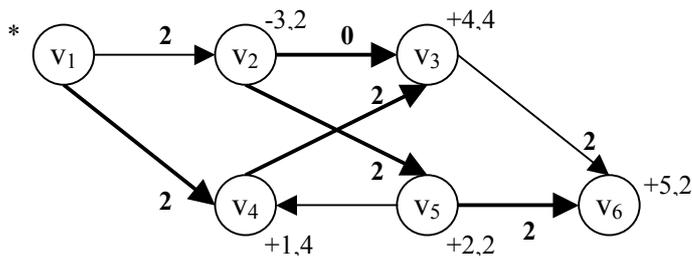
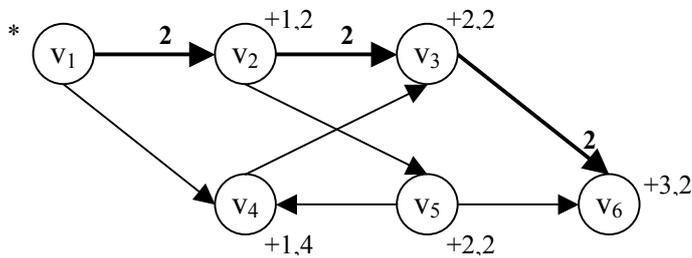
$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1 + 2x_3 - x_4 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

1b) Il vincolo di uguaglianza impone di "prendere due oggetti" e il vincolo di disuguaglianza rende ammissibili le coppie  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_4)$ ,  $(x_2, x_4)$ ,  $(x_3, x_4)$  a cui corrispondono i valori della funzione obiettivo 4, 2, 4, -1; pertanto si ha  $x_S = (0, 0, 1, 1)$  e  $z_S = -1$ .

1c) La soluzione  $x_S$  non verifica il vincolo (\*) per cui non è ottimale per **P**.

La tabella è ottimale e la soluzione è  $x^* = (1, 0, 0)$ ,  $z^* = 1$ .

2a) Applicando l'algoritmo si ottengono le seguenti iterazioni:



2b) Il taglio ottimo è formato dagli archi  $a_{12}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{36}$ ,  $a_{54}$  e la capacità è data da  $2 + 0 + 0 + 2 = 4$ .

3) Indicando gli azionisti con A, B, C, D e con 0 le coalizioni perdenti e con 1 quelle vincenti si ha:

A	B	C	D	AB	AC	AD	BC	BD	CD	ABC	ABD	ACD	BCD	ABCD
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1

I contributi vincenti sono rispettivamente 2, 2, 2, 6 e quindi l'indice risulta essere:

$$1/6, 1/6, 1/6, 1/2$$

## **ERRORI FREQUENTI**

L'esercizio 1 richiedeva di precisare le considerazioni necessarie alla risoluzione.

L'esercizio 2 richiedeva tre iterazioni dell'algoritmo di Ford e Fulkerson, senza particolari difficoltà tecniche, salvo l'inusuale etichettatura dei vertici, che generava un taglio non immediatamente identificabile.

L'esercizio 3 richiedeva la verifica delle coalizioni vincenti e il calcolo dell'indice richiesto.