Prova parziale di R.O. del 21/12/1999

Cognome **Nome** **Matr.**

☐ Informatica

☐ Matematica

CORSO DI RICERCA OPERATIVA: SVOLGERE GLI **ESERCIZI 1 E 2**, CON PUNTEGGI **19, 14** E TEMPO COMPLESSIVO **35 MINUTI**.

CORSO DI MATEMATICHE SUPERIORI: SVOLGERE **TUTTI GLI ESERCIZI**, CON PUNTEGGI **12, 9, 12** E TEMPO COMPLESSIVO **55 MINUTI**.

1) Sia **P** il seguente programma lineare a variabili 0-1:

$$\begin{array}{lll} \max & z = 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 & \\ & x_1 + x_2 + x_3 \le 2 & (*) \\ & x_1 + 2x_3 + x_4 \le 2 & (*) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} & \end{array}$$

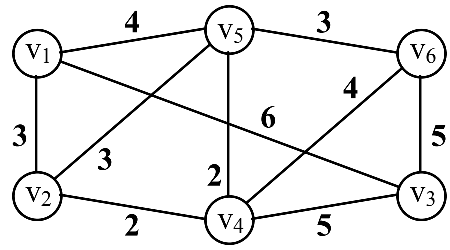
a - Scrivere il rilassamento lagrangiano $\mathbf{P}_L$ con moltiplicatori unitari dei vincoli di disuguaglianza (*).

b - Risolvere $\mathbf{P}_L$ con semplici considerazioni, riportandole.

c - La soluzione di $\mathbf{P}_L$ è ottimale per **P**? (giustificare la risposta).

TEMPO SUGGERITO 20m

2) Sia dato il seguente grafo non orientato **G** in cui i numeri in grassetto rappresentano i pesi degli spigoli:



Determinare uno spanning tree di peso minimo con l'algoritmo di Prim, analizzando i vertici e gli spigoli in ordine di indice crescente, precisando ad ogni iterazione lo spigolo aggiunto.

TEMPO SUGGERITO 15m

3) Sia dato il gioco non cooperativo in forma strategica:

I \ II	S	C	D
T	1, 2	0, 3	2, 0
M	3, 0	1, 5	0, 6
B	4, 1	0, 4	-1, 2

a - Ridurre il gioco per dominanza.

b - Determinare, se esistono, gli equilibri di Nash in strategie pure.

c - Determinare gli equilibri di Nash in strategie miste.

TEMPO SUGGERITO 20m

SOLUZIONE DELLA PROVA PARZIALE DI R.O. DEL 21/12/1999

1a) Il rilassamento $\mathbf{P}_L$ richiesto:

$$\begin{aligned} \max \quad & z_L = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

1b) Considerando il problema $\mathbf{P}_L$ come uno zaino generalizzato si osserva che il vincolo di uguaglianza impone di prendere un solo oggetto tra i primi tre oppure due oggetti tra i primi tre e il quarto; nel primo caso conviene portare il secondo oggetto, mentre nel secondo caso conviene portare il primo e secondo oggetto, oltre al quarto. Quindi si ha:

$x'_L = (0, 1, 0, 0)$; $z_L(x'_L) = 7$

$x''_L = (1, 1, 0, 1)$; $z_L(x''_L) = 8$

da cui si ricava che la soluzione ottimale si ha nel secondo caso.

1c) La soluzione è ottimale per $\mathbf{P}$ in quanto:

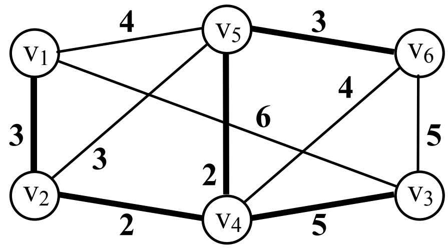
$u_2(x''_L) = 2 -1 -1 \geq 0$ OK

$u_3(x''_L) = 2 -1 -1 \geq 0$ OK

$z(x''_L) = 8 = z_L(x''_L)$

2) Si aggiungono ordinatamente i seguenti spigoli:

$(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_4, v_3)$



3a) La strategia C domina fortemente la strategia S, che può essere eliminata; a questo punto la strategia M domina fortemente la strategia B, che può essere eliminata, ottenendo:

I \ II	C	D
T	0, 3	2, 0
M	1, 5	0, 6

3b) Sottolineando le migliori risposte si ottiene:

I \ II	C	D
T	0, $\underline{3}$	$\underline{2}$, 0
M	$\underline{1}$, 5	0, $\underline{6}$

quindi non esistono equilibri di Nash in strategie pure.

3c) Le utilità attese se il giocatore I gioca (p, 1-p) e il giocatore II gioca (q, 1-q) sono:

$v_I = 2\,p\,(1-q) + (1-p)\,q = (2 - 3q)\,p + q$

$v_{II} = 3\,p\,q + 5\,(1-p)\,q + 6\,(1-p)\,(1-q) = (4p - 1)\,q - 6p + 6$

da cui si ricava:

$p = 1/4$; $q = 2/3$

Le utilità attese risultano rispettivamente:

$v_I = 2/3$

$v_{II} = 9/2$