PROVA SCRITTA DI MATEMATICHE SUPERIORI E

DI RICERCA OPERATIVA (V.O.) DEL 21/6/2001

No cell, no hell!

1) Sia dato il seguente problema lineare a variabili 0-1:

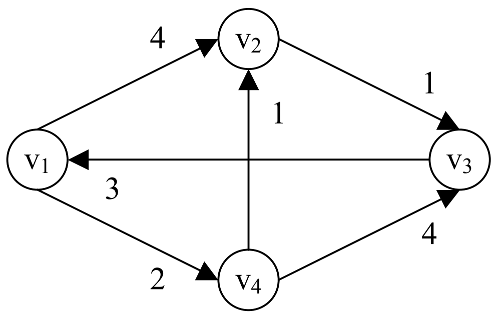
$$\begin{array}{ll} \max & z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0\text{-}1\} \end{array}$$

a) Risolverlo con semplici considerazioni, riportandole.

b) Aggiungere il vincolo $x_1 + 3x_2 + 2x_4 \leq 2$ e ripetere il punto a).

TEMPO SUGGERITO 15m
PUNTEGGIO 10

2) Sia data la seguente rete:



Determinare le lunghezze dei cammini di costo minimo da v_1 agli altri nodi, utilizzando l'algoritmo di correzione modificato. Si esaminino i nodi e gli archi in ordine crescente di indice.

TEMPO SUGGERITO 15m
PUNTEGGIO 8

3) Sia dato il seguente problema di contrattazione a due giocatori:

$$V = \{(x_1, x_2) \text{ t.c. } 3x_1^2 + x_2 \leq 27\}$$
$$d = (1, 15)$$

a - Determinare la soluzione di Nash.

b - Determinare la soluzione di Kalai-Smorodinsky.

c - Determinare la soluzione Egualitaria.

d - Determinare la soluzione Utilitaria.

TEMPO SUGGERITO 30m
PUNTEGGIO 12

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 21/6/2001

1a) Intrepretando il problema come uno zaino generalizzato, il primo vincolo indica di "prendere uno dei primi tre oggetti" e il secondo vincolo indica di "prendere uno degli ultimi tre oggetti". Le soluzioni possibili sono allora:

$\bar{x} = (1, 0, 0, 1)$; $z(\bar{x}) = 2$
$\hat{x} = (0, 1, 0, 0)$; $z(\hat{x}) = 3$
$\tilde{x} = (0, 0, 1, 0)$; $z(\tilde{x}) = 1$

da cui $x^* = (0, 1, 0, 0)$; $z^* = 3$.

1b) Delle tre soluzioni solo $\tilde{x}$ soddisfa il nuovo vincolo, per cui è la soluzione ottimale.

2) Ordinando gli archi come a_{12}, a_{14}, a_{23}, a_{31}, a_{42}, a_{43} si ha:

v_1	v_2	v_3	v_4	
0	99	99	99	a_{12}
0	4	99	99	a_{14}
0	4	99	2	a_{23}
0	4	5	2	a_{31}, a_{42}
0	3	5	2	a_{43} (1) a_{12}, a_{14}, a_{23}
0	3	4	2	a_{31}, a_{42}, a_{43} (2) a_{12}, a_{14}, a_{23} (STOP) a_{31}, a_{42}, a_{43}(3)

3a) E' necessario determinare:

$$\underset{1 \le x_1 \le 2}{\arg\max} \left\{(x_1 - 1)(-3x_1^2 + 12)\right\}$$

da cui:

$$x_1 = \tfrac{1+\sqrt{13}}{3} \approx 1.535$$
$$x_2 = \tfrac{67-2\sqrt{13}}{3} \approx 19.929$$

3b) Le utopie dei due giocatori sono rispettivamente 2 e 24 per cui si ha:

$$\begin{cases} x_2 = -3x_1^2 + 27 \\ x_2 = 9x_1 + 6 \end{cases}$$

da cui:

$$x_1 = \tfrac{-3+\sqrt{37}}{2} \approx 1.541$$
$$x_2 = \tfrac{-15+9\sqrt{37}}{2} \approx 19.872$$

3c) E' necessario risolvere:

$$\begin{cases} x_2 = -3x_1^2 + 27 \\ x_2 = x_1 + 14 \end{cases}$$

da cui:

$$x_1 = \tfrac{-1+\sqrt{157}}{6} \approx 1.922$$
$$x_2 = \tfrac{83+\sqrt{157}}{6} \approx 15.922$$

3d) E' necessario determinare:

$$\underset{1 \le x_1 \le 2}{\arg\max} \left\{(x_1 - 3x_1^2 + 27)\right\}$$

da cui:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 24$$