PROVA SCRITTA DI MATEMATICHE SUPERIORI E

DI RICERCA OPERATIVA (V.O.) DEL 13/9/2001

No cell, no hell!

1) Sia dato il seguente problema lineare intero **P**:

$$\begin{aligned} \max\quad & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ \text{s.t.}\quad & 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 = 2 \\ & x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \text{ e interi} \end{aligned}$$

Risolverlo con semplici considerazioni (riportandole) e non sperimentando le possibili soluzioni.

TEMPO SUGGERITO: 15m
PUNTEGGIO 9

2) Si consideri una generica rete e il relativo problema di flusso massimo. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false, giustificando adeguatamente le risposte:
   a) Se si aumenta la capacità massima di un arco del taglio ottimo il valore del flusso massimo aumenta sempre.
   b) Se si aumenta di una quantità ***k*** la capacità massima di un arco del taglio ottimo il valore del flusso massimo aumenta della quantità ***k***.
   c) Se si aumenta la capacità minima di un qualsiasi arco il valore del flusso massimo non può mai diminuire.

TEMPO SUGGERITO 20m
PUNTEGGIO 9

3) Si consideri il seguente gioco TU di costi (N, c):
   $N = \{1, 2, 3\}$
   $c(1) = 10$; $c(2) = 11$; $c(3) = 13$; $c(12) = 15$; $c(13) = 18$; $c(23) = 21$; $c(N) = 25$;
   a) Calcolare le ripartizioni ECA, ACA, CGA.
   b) Calcolare il valore di Shapley.

TEMPO SUGGERITO 30m
PUNTEGGIO 12

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 13/9/2001

1) Il primo vincolo di uguaglianza impone di "prendere due elementi" dei primi due tipi, ma il primo tipo ha un valore maggiore e "consuma" meno il vincolo di disuguaglianza, quindi si ha:

$x_1 = 2, x_2 = 0$

che però viola il vincolo di disuguaglianza di tre unità.
Il secondo vincolo di uguaglianza impone di "prendere due elementi" dei secondi due tipi, ma due elementi del quarto tipo che hanno un valore positivo non "reintegrano" a sufficienza il vincolo di disuguaglianza, mentre un elemento di ogni tipo è sufficiente; quindi si ha:

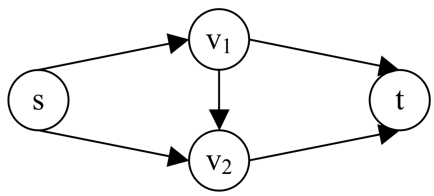
$x_3 = 1, x_4 = 1$

In conclusione $x^* = (2, 0, 1, 1)$; $z^* = 4$.

2a) FALSA. Se esiste un secondo taglio ottimo a cui l'arco non appartiene il flusso non può aumentare.

2b) FALSA. Poichè è falsa la precedente affermazione, a maggior ragione è falsa questa.

2c) FALSA. Si veda il seguente controesempio in cui tutti gli archi hanno capacità minima nulla e capacità massima 1:



Il flusso massimo vale 2, ma se si impone una capacità minima di 1 all'arco (v_1, v_2) il flusso massimo vale 1.

3a) I costi marginali sono dati da:

$m(1) = c(N) - c(23) = 4$; $m(2) = c(N) - c(13) = 7$; $m(3) = c(N) - c(12) = 10$.

Il costo non separabile è dato da:

$g(N) = c(N) - m(1) - m(2) - m(3) = 4$.

Quindi si ha:

$r(1) = c(1) - m(1) = 6$; $r(2) = c(2) - m(2) = 4$; $m(3) = c(3) - m(3) = 3$;

$g(1) = \min \{c(S) - \sum_{i\in S} m(i) \mid 1 \in S\} = \min \{6, 4, 4, 4\} = 4$;

$g(2) = \min \{c(S) - \sum_{i\in S} m(i) \mid 2 \in S\} = \min \{4, 4, 4, 4\} = 4$;

$g(3) = \min \{c(S) - \sum_{i\in S} m(i) \mid 3 \in S\} = \min \{3, 4, 4, 4\} = 3$.

Allora:

ECA = (5.333; 8.333; 11.333)

ACA = (5.846; 8.231; 10.923)

CGA = (5.454; 8.454; 11.091)

3b) Applicando la formula standard si ha:

Sh = (6.167; 8.167; 10.667)