PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA DEL 6/12/2000

1) Calcolare col metodo di riduzione di Gauss il determinante della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Riportare tutte le iterazioni del metodo.

TEMPO SUGGERITO: 15m
PUNTEGGIO 8

2) Determinare il punto di intersezione della retta passante per i punti P(2, 1) e Q(-1, 0) con la retta passante per il punto R(1, 1) e ortogonale al vettore **v**(2, -1).

TEMPO SUGGERITO 15m
PUNTEGGIO 8

3) Sia data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

a) Determinare il campo di esistenza, gli intervalli di crescenza e decrescenza e i massimi e i minimi relativi di *f*.

b) Determinare gli intervalli di convessità e concavità e i flessi di *f*.

TEMPO SUGGERITO 25m
PUNTEGGIO 10

4) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'(x) = \frac{x^2}{e^{y(x)}}$$

con la condizione che y(0) = 1.

TEMPO SUGGERITO 15m
PUNTEGGIO 7

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 6/12/2000

1) $$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= -\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

2) La retta passante per P e Q si ottiene da $\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-1}{0-1}$,cioè x - 3y + 1 = 0; la retta perpendicolare a **v** passante per R si ottiene da 2(x - 1) - 1(y - 1) = 0, cioè 2x -y - 1 = 0. Dall'intersezione delle due rette si ricava il punto cercato (4/5, 3/5).

3a) f è definita per $x \neq 1$.

Dallo studio del segno di $f' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$ si ottiene che f è crescente negli intervalli $]-\infty, 1-\sqrt{2}]$ e $[1+\sqrt{2}, +\infty[$ ed è decrescente negli intervalli $[1-\sqrt{2}, 1[$ e $]1, 1+\sqrt{2}]$; i punti $1-\sqrt{2}$ e $1+\sqrt{2}$ sono rispettivamente un massimo relativo e un minimo relativo.

3b) Dallo studio del segno di $f'' = \frac{4}{(x-1)^3}$ si ottiene che f è concava nell'intervallo $]-\infty, 1[$ ed è convessa nell'intervallo$]1, +\infty]$; non ci sono punti di flesso.

4) Separando le variabili si ottiene $e^{y(x)}\,dy = x^2\,dx$; integrando si ha $e^{y(x)} = 1/3\, x^3 + c$; imponendo la condizione iniziale si ricava c = e, per cui la soluzione è $y(x) = \log(1/3\, x^3 + e)$.