

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA DEL 11/1/2001

1) Risolvere con il metodo di riduzione di Gauss il seguente sistema lineare:

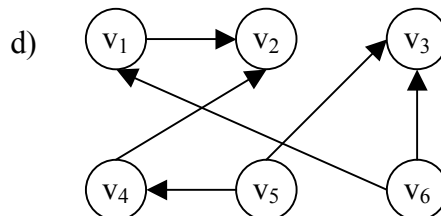
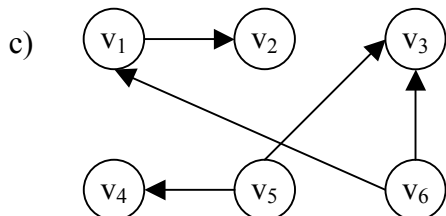
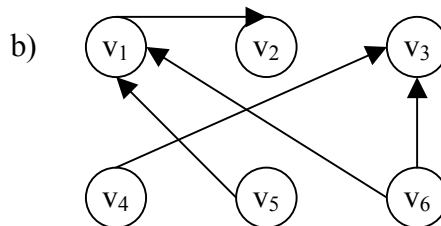
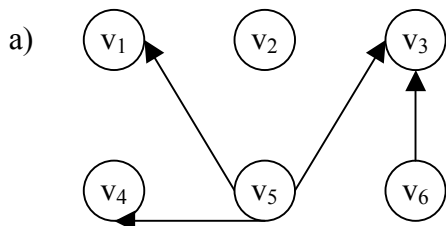
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

Riportare tutte le iterazioni del metodo.

TEMPO SUGGERITO 20m

PUNTEGGIO 10

2) Dire quali tra i seguenti grafi sono alberi:



Giustificare brevemente le risposte.

TEMPO SUGGERITO 10m

PUNTEGGIO 7

3) Sia data la seguente successione:

$$\left\{ \frac{n}{n^2 + 1} \right\}_{n \geq 0}$$

a) Scrivere i primi 5 termini della successione.

b) Per quali valori di n la successione è decrescente?

c) Per quali valori di n la successione assume valori minori di $1/4$?

TEMPO SUGGERITO 20m

PUNTEGGIO 9

4) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$$

con le condizioni che $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$

TEMPO SUGGERITO 15m

PUNTEGGIO 7

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 11/1/2001

1) Applicando il metodo richiesto si hanno le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A ritroso si ricavala soluzione:

$$x_3 = t, x_2 = -1 + 2t, x_1 = 1 - t, t \in \mathbf{R}.$$

- 2a) NO, perchè v_2 è isolato e quindi il grafo non è connesso.
2b) SI, perchè il grafo è connesso e privo di cicli elementari.
2c) SI, perchè il grafo è connesso e privo di cicli elementari.
2d) NO, perchè il grafo contiene il ciclo elementare che tocca i nodi $v_1 - v_2 - v_4 - v_5 - v_3 - v_6 - v_1$.

3a) 0; 1/2; 2/5; 3/10; 4/17.

3b) La condizione:

$$\frac{n}{n^2 + 1} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1}$$

è verificata per $n \geq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.618$, cioè $n \geq 1$.

3c) E' sufficiente osservare che per $n = 4$ il termine corrispondente è minore di 1/4 e che la successione è decrescente; inoltre per $n = 0$ il termine corrispondente è nullo. In conclusione si ha che i valori sono minori di 1/4 per $n = 0$ e per $n \geq 4$

4) L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, che ha soluzione $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$, per cui la soluzione generale è $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Imponendo le condizioni iniziali, e ricordando che la derivata è $y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}$ si hanno le relazioni:

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$c_1 + 2c_2 = 0$$

da cui si ottiene $c_1 = 2$ e $c_2 = -1$ per cui la soluzione è:

$$y = 2e^x - e^{2x}$$

ERRORI FREQUENTI

L'esercizio 1 non ha dato grossi problemi nella riduzione, mentre la presenza di una equazione indeterminata ha permesso di "dare sfogo alla fantasia": fate attenzione, non è così infrequente.

L'esercizio 2 non ha evidenziato una conoscenza approssimativa delle definizioni relative ai grafi: ripassatele.

L'esercizio 3 ha presentato più difficoltà del previsto, in quanto a fronte di un esercizio "standard" alcuni hanno fatto errori banali, ad esempio hanno sbagliato la soluzione dell'equazione di II grado.

L'esercizio 4 non ha creato nessun problema.