PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA DEL 19/7/2001

No cell, no hell!

1) Risolvere il seguente sistema lineare, utilizzando il metodo di riduzione di Gauss:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

TEMPO SUGGERITO 20m
PUNTEGGIO 10

2) a) Determinare la retta *r* parallela al vettore **u** = (1, 2) e passante per il punto P(1, 0).
b) Determinare la retta *s* passante per i punti Q(0, -1) ed R(3, 0).
c) Determinare il punto S di intersezione delle rette *r* ed *s*.

TEMPO SUGGERITO 15m
PUNTEGGIO 8

3) Determinare la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x+1}$.

TEMPO SUGGERITO 15m
PUNTEGGIO 7

4) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y''(x) + 6y'(x) + 5y(x) = 0$$

sapendo che $y(0) = 2$ e $y'(0) = 2$.

TEMPO SUGGERITO 15m
PUNTEGGIO 8

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 19/7/2001

1) La matrice associata è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{IIr} \leftarrow \text{IIr} - 2\text{Ir} \\ \text{IIIr} \leftarrow \text{IIIr} - \text{Ir} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{IIc} \leftrightarrow \text{IIIc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{IIIr} \leftarrow \text{IIIr} - \text{IIr} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_4 = \mathrm{t}$; $x_2 = \mathrm{s}$; $x_3 = \dfrac{2+\mathrm{t}}{2}$; $x_1 = -\dfrac{2\mathrm{s}+3\mathrm{t}}{2}$

2a) $r : \begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{t}+1 \\ \mathrm{y} = 2\mathrm{t} \end{cases} \Leftrightarrow r : \mathrm{y} = 2\mathrm{x} - 2$

2b) $s : \dfrac{\mathrm{x}-0}{3-0} = \dfrac{\mathrm{y}+1}{0+1} \Leftrightarrow s : \ \mathrm{y} = \dfrac{\mathrm{x}-3}{3}$

2c) $\begin{cases} \mathrm{y} = 2\mathrm{x} - 2 \\ \mathrm{y} = \dfrac{\mathrm{x}-3}{3} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{S}\left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$

3) Applicando le usuali regole di derivazione si ottiene $f'(x) = \dfrac{5}{2(x+1)\sqrt{x^2-3x-4}}$.

4) L'equazione caratteristica associata è:

$\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$

che ha soluzioni $\lambda_1 = -5$ e $\lambda_2 = -1$.

La soluzione è data da $y(x) = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{-x}$.

Le condizioni iniziali impongono:

$c_1 + c_2 = 2$

$-5c_1 - c_2 = 2$

da cui si ricava $c_1 = -1$ e $c_2 = 3$ e quindi $y(x) = -e^{-5x} + 3e^{-x}$.