

PROVA SCRITTA DI MATEMATICHE SUPERIORI DEL 10/01/2002



No cell, no hell!

- 1) Una piccola ditta produce filati di due tipi:
Cotone: ogni matassa richiede 4 Kg. di cotone e 1 Kg di lana; il prezzo di vendita è 5 €.
Lana: ogni matassa richiede 2 Kg. di cotone e 6 Kg di lana; il prezzo di vendita è 7 €.
Sono disponibili 600 Kg. di cotone e 520 Kg. di lana.
- Scrivere un modello lineare che massimizzi il ricavo e determinare la produzione ottimale.
 - E' conveniente acquistare ulteriori 500 Kg di cotone al costo di 0.80 € al Kg?.

TEMPO SUGGERITO 30m

PUNTEGGIO 12

- 2) Sia dato il gioco TU (N, v) in forma caratteristica con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ e v definita da:

$$v(S) = 0 \quad \text{se } |S| \leq 2$$

$$v(123) = 2$$

$$v(124) = 4$$

$$v(134) = 4$$

$$v(234) = 5$$

$$v(N) = 5$$

Dimostrare che $x = (0, 1, 1, 3)$ è l'unico elemento del nucleo.

TEMPO SUGGERITO 15m

PUNTEGGIO 9

- 3) Si consideri una generica rete e il relativo problema di flusso massimo. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false, giustificando adeguatamente le risposte:
- Dato un qualsiasi insieme di nodi non comprendente nè la sorgente nè il pozzo la somma dei flussi sugli archi entranti nell'insieme è sempre uguale alla somma dei flussi sugli archi uscenti dall'insieme.
 - Se si aumenta la capacità massima di un qualsiasi arco il valore del flusso massimo aumenta sempre.
 - Se si diminuisce la capacità massima di un qualsiasi arco il valore del flusso massimo diminuisce sempre.

TEMPO SUGGERITO 15m

PUNTEGGIO 9

PROVA SCRITTA DI MATEMATICHE SUPERIORI DEL 10/01/2002



No cell, no hell!

1) Una piccola ditta produce filati di due tipi:

Cotone: ogni matassa richiede 4 Kg. di cotone e 1 Kg di lana; il prezzo di vendita è 5 €.

Lana: ogni matassa richiede 2 Kg. di cotone e 6 Kg di lana; il prezzo di vendita è 7 €.

Sono disponibili 600 Kg. di cotone e 520 Kg. di lana.

a) Scrivere un modello lineare che massimizzi il ricavo e determinare la produzione ottimale.

b) E' conveniente acquistare ulteriori 500 Kg di cotone al costo di 0.80 € al Kg?.

TEMPO SUGGERITO 30m

PUNTEGGIO 17

2) Sia dato il gioco TU (N, v) in forma caratteristica con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ e v definita da:

$$v(S) = 0 \quad \text{se } |S| \leq 2$$

$$v(123) = 2$$

$$v(124) = 4$$

$$v(134) = 4$$

$$v(234) = 5$$

$$v(N) = 5$$

Dimostrare che $x = (0, 1, 1, 3)$ è l'unico elemento del nucleo.

TEMPO SUGGERITO 15m

PUNTEGGIO 13

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 10/01/2002

- 1a) Posto x_1 = numero delle matasse di cotone e x_2 = numero delle matasse di lana, si hanno i vincoli:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 600$$

non si deve usare più cotone di quello disponibile

$$x_1 + 6x_2 \leq 520$$

non si deve usare più lana di quella disponibile

$$x_1, x_2 \geq 0$$

le matasse devono essere in quantità non negative

La funzione obiettivo è:

$$\max 5x_1 + 7x_2$$

si deve massimizzare il ricavo

Risolvendo si ha:

	x_1	x_2		u_1	x_2		u_1	u_2			
u_1	-4 *	-2	600	x_1	-1/4	-1/2	150	x_1	-3/11	-1/11	1280/11
u_2	-1	-6	520	u_2	1/4	-11/2 *	370	x_2	1/22	-2/11	740/11
z	5	7	0	z	-5/4	9/2	750	z	-23/22	-9/11	11580/11

- 1b) Da $u_1 = 23/22 > 1 > 0.80$ si ricava che potrebbe essere conveniente.

Sperimentalmente si ha:

	x_1	x_2		u_1	x_2		u_1	u_2			
u_1	-4 *	-2	1100	x_1	-1/4	-1/2	275	x_1	-3/11	-1/11	2780/11
u_2	-1	-6	520	u_2	1/4	-11/2 *	245	x_2	1/22	-2/11	490/11
z	5	7	0	z	-5/4	9/2	1375	z	-23/22	-9/11	17330/11

Il guadagno è 522,73 €, mentre i 500 Kg costano 400 €, quindi è vantaggioso.

- 2) E' sufficiente osservare che:

$$v(234) = v(N) \text{ e } v(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_2 + x_4 \geq 4 \\ x_3 + x_4 \geq 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 \leq 3 \\ x_3 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

da cui si ricava la tesi.

- 3a) VERA. Per gli insiemi contenenti un solo nodo l'affermazione è vera per il vincolo di bilanciamento; per l'unione di due insiemi per i quali è vera, l'affermazione è banalmente vera se non esistono archi tra gli insiemi, altrimenti tali archi contribuiscono come flusso entrante (per un insieme) e come flusso uscente (per l'altro insieme) e quindi possono non essere conteggiati e l'affermazione è ancora vera.
- 3b) FALSA. Se l'arco non appartiene al taglio ottimo il flusso non può aumentare.
- 3c) FALSA. Se l'arco non è saturo il flusso può diminuire o meno.

ERRORI FREQUENTI