

PROVA SCRITTA DI RICERCA OPERATIVA DEL 05/07/2002

No cell, no hell!



1) Si consideri il seguente problema lineare:

$$\max z = 10x_1 + 3x_2 - 17x_3$$

$$\text{s.t. } x_1 - 2x_3 \leq 2$$

$$3x_1 + x_2 - 5x_3 \leq 7$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Determinare l'insieme delle soluzioni ottimali. Si scelga la variabile uscente più a sinistra e la variabile entrante più in alto.

TEMPO SUGGERITO 20m

PUNTEGGIO 15

2) Sia dato il gioco TU (N, v) in forma caratteristica con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ e v definita da:

$$v(S) = 1 \quad \text{se } |S| = 1$$

$$v(S) = 4 \quad \text{se } |S| = 2$$

$$v(S) = 7 \quad \text{se } |S| = 3$$

$$v(N) = 10$$

a) Determinare una allocazione appartenente al nucleo.

b) Verificare che il gioco è superadditivo.

c) Calcolare il valore di Shapley.

TEMPO SUGGERITO 15m

PUNTEGGIO 15

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 05/07/2002

1) La tabella associata al problema è:

	x_1	x_2	x_3	
u_1	-1*	0	2	2
u_2	-3	-1	5	7
z	10	3	-17	0

	u_1	x_2	x_3	
x_1	-1	0	2	2
u_2	3	-1*	-1	1
z	-10	3	3	20

	u_1	u_2	x_3	
x_1	-1	0	2	2
x_2	3	-1	-1	1
z	-1	-3	0	23

$x^* = (2, 1, 0)$, $z^* = 23$. Potrebbero esserci altre soluzioni ottimali, a causa dello 0 nella riga di z . Facendo cardine sull'elemento 2-3 si ha:

	u_1	u_2	x_2	
x_1	5	-2	-2	4
x_3	3	-1	-1	1
z	-1	-3	0	23

$x^\# = (4, 0, 1)$, $z^* = 23$. Non ci sono altre soluzioni ottimali, perchè riapplicando il cardine si tornerebbe alla tabella precedente.

Le soluzioni ottimali sono i punti del segmento compreso tra x^* e $x^\#$.

2a) Ad esempio $x = (2, 3, 2, 3)$ è una allocazione del nucleo; infatti:

$$\text{se } |S| = 1, x(S) \geq 2 > 1 = v(S)$$

$$\text{se } |S| = 2, x(S) \geq 4 = v(S)$$

$$\text{se } |S| = 3, x(S) \geq 7 = v(S)$$

$$x(N) = 10 = v(N)$$

2b) E' sufficiente osservare che:

$$v(i) + v(j) = 2 < 4 = v(ij)$$

$$v(i) + v(jk) = 5 < 7 = v(ijk)$$

$$v(i) + v(jkh) = 8 > 10 = v(N)$$

$$v(ij) + v(hk) = 8 > 10 = v(N)$$

2c) Poichè i giocatori sono simmetrici il valore di Shapley assegna ai quattro giocatori 2.5 ciascuno.

ERRORI FREQUENTI

Nel primo esercizio era necessario specificare che non si potevano avere altri vertici ottimali.

Nel secondo esercizio è sfuggito a tutti che i giocatori erano simmetrici: nessun errore ma molto tempo perso con le 24 permutazioni.