PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (INF.) DEL 17/09/2002

No cell, no hell!

1) Applicando il metodo di Gauss, risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

TEMPO SUGGERITO 20m
PUNTEGGIO 15

2) Dati i punti $P_1(1, 0, 1)$, $P_2(2, 3, 1)$, $P_3(-1, -2, 1)$ e $P_4(0, 1, 2)$:

a) Determinare l'equazione parametrica e cartesiana del piano passante per P_1, P_2, P_3.

b) Calcolare il volume del tetraedro di vertici P_1, P_2, P_3, P_4.

TEMPO SUGGERITO 20m
PUNTEGGIO 15

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 17/09/2002

1) La matrice completa associata al sistema è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \text{IIr}\leftarrow\text{IIr - Ir, IIIr}\leftarrow\text{IIIr - 2Ir,} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \text{IIIr}\leftarrow\text{IIIr - 2IIr} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Da cui si ricava a ritroso $x_3 = 1$; $x_2 = -1$; $x_1 = 2$.

2a) Il piano passante per P_1 e parallelo ai vettori $(P_2-P_1) = (1, 3, 0)$ e $(P_3-P_1) = (-2, -2, 0)$ ha equazione parametrica:

$$\pi : \begin{cases} x = s - 2t + 1 \\ y = 3s - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

e cartesiana $z = 1$.

2b) Il volume del tetraedro è dato da:

$$\frac{1}{6}(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1) \cdot (P_4 - P_1) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}$$

ERRORI FREQUENTI

Il compito non ha presentato particolari difficoltà.