PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (INF.) DEL 22/01/2003

1) Sia dato l'omomorfismo $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$, rappresentato dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -4 & -8 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinare una base per Ker f e per Im f.

TEMPO SUGGERITO 25m
PUNTEGGIO 18

2) Scrivere l'equazione del fascio di rette proprio di centro P(1, -1) e determinare l'equazione della retta r del fascio passante per il punto Q(2, 2).

TEMPO SUGGERITO 15m
PUNTEGGIO 12

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 22/01/2003

1) Una base di Ker f si determina risolvendo il sistema Ax = 0. Riducendo A col metodo di Gauss si ottiene la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ha $x_1 = -9/4x_3 + 7/4x_4$; $x_2 = -3/4x_3 - 1/4x_4$, per cui si ha:

Ker $f = \mathcal{L}((-9/4, -3/4, 1, 0), (7/4, -1/4, 0, 1))$

Inoltre è facile ricavare che:

Im $f = \mathcal{L}((1, -4, 0), (3, -8, -4))$

2) Utilizzando le rette $x = 1$, $y = -1$ si ottiene l'equazione del fascio:

$\lambda x + \mu y - \lambda + \mu = 0$

Imponendo il passaggio per Q si ottiene $\lambda = -3\mu$, per cui posto $\mu = 1$ si ottiene $\lambda = -3$ da cui la retta cercata è:

r : $3x - y - 4 = 0$

ERRORI FREQUENTI

Nel primo esercizio ci sono state molte difficoltà nel risolvere il sistema Ax = 0; successivamente è risultato complesso anche la determinazione della base dell'immagine. Nel secondo esercizio la determinazione del fascio è stata fonte di molti errori, conseguentemente anche la determinazione della retta r è risultata impossibile facendo riferimento all'equazione del fascio.