PROVA SCRITTA DI TEORIA DEI GIOCHI A DEL 22/01/2003

1. Siano dati i cinque oggetti A, B, C, D e E a cui i giocatori I e II assegnano le valutazioni riportate nella seguente tabella:

	A	B	C	D	E
I	15	18	9	33	25
II	12	30	12	11	35

   a. Determinare la divisione ottenuta applicando la procedura Adjusted Winner di Brams-Taylor.

   b. Determinare la divisione ottenuta applicando la procedura Proportional Allocation di Brams-Taylor.

   TEMPO SUGGERITO 15m
   PUNTEGGIO 14

2. Sia dato il seguente problema lineare P:

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = -6x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\
s.t. & x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3 \\
 & 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 \geq 4 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

   a. Risolvere P con l'algoritmo del simplesso, scegliendo la variabile uscente più a sinistra.

   b. Determinare la regione ottimale.

   c. La regione ammissibile è limitata?

   TEMPO SUGGERITO 25m
   PUNTEGGIO 16

1. Sia dato il seguente problema lineare P:

$$\begin{array}{ll} \max & z = -6x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ s.t. & x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 \geq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

   a. Risolvere P con l'algoritmo del simplesso, scegliendo la variabile uscente più a sinistra.
   b. Determinare la regione ottimale.
   c. La regione ammissibile è limitata?

   TEMPO SUGGERITO 25m
   PUNTEGGIO 16

2. Si consideri il seguente gioco TU in forma caratteristica:

$$v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(12) = v(13) = 2; v(23) = v(N) = 5$$

   Determinare tutte le allocazioni nel nucleo.
   TEMPO SUGGERITO 15m
   PUNTEGGIO 14

1. a. Calcolando i rapporti I/II si ottiene l'ordine D, A, C, E e B. Il giocatore I ottiene gli oggetti A e D con una valutazione 48, mentre il giocatore II ottiene gli oggetti B, C e E con una valutazione 77. Trasferendo l'oggetto C al giocatore I le nuove valutazioni sono rispettivamente 48 + 9 = 57 e 75 - 12 = 65. Infine dalla relazione:

$$57 + \alpha 25 = 65 - \alpha 35 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{15}$$

si ha che trasferendo due quindicesimi di E al giocatore I si ottiene la valutazione 60.33 per entrambi.

b. Applicando la procedura Proportional Allocation i giocatori ricevono le seguenti frazioni e valutazioni (non richieste):

	A		B		C		D		E		Punti
I	$\frac{5}{9}$	8.33	$\frac{3}{8}$	6.75	$\frac{3}{7}$	3.86	$\frac{3}{4}$	24.75	$\frac{5}{12}$	10.42	54.11
II	$\frac{4}{9}$	5.33	$\frac{5}{8}$	18.75	$\frac{4}{7}$	6.86	$\frac{1}{4}$	2.75	$\frac{7}{12}$	20.42	54.11

2. a. Applicando l'algoritmo nel modo richiesto si ha:

	x_1	x_2	x_3	
u_1	$\boxed{1}$	1	-2	-3
u_2	3	2	-5	-4
z	-6	-2	4	0

	u_1	x_2	x_3	
x_1	1	$\boxed{-1}$	2	3
u_2	3	-1	1	5
z	-6	4	-8	-18

	u_1	x_1	x_3	
x_2	1	-1	2	3
u_2	2	1	-1	2
z	-2	-4	0	-6

La tabella è ottimale e la soluzione è $x^* = (0; 3; 0); z^* = -6$.

b. La presenza dello 0 tra i coefficienti di z e la non degenericità della tabella assicura che esisono altre soluzioni ottimali. Facendo cardine sull'elemento di posto 2-3 si ottiene:

	u_1	x_1	u_2	
x_2	5	1	-2	7
x_3	2	1	-1	2
z	-2	-4	0	-6

La nuova soluzione ottimale è $x^* = (0; 7; 2); z^* = -6$ e l'insieme delle soluzioni ottimali è il segmento compreso tra le due soluzioni ottenute.

c. NO, infatti la prima colonna dell'ultima tabella (o della penultima) segnala la presenza di uno spigolo illimitato, per cui la regione ammissibile è illimitata.

3. Le condizioni $v(1) = 0; v(23) = v(N) = 5$ impongono $x_1 = 0; x_2 + x_3 = 5$ e le condizioni $v(12) = v(13) = 2$ impongono $x_2 \geq 2; x_3 \geq 2$, da cui:

$$\mathrm{Core}(v) = \{x_1 = 0; x_2 = \alpha; x_3 = 5 - \alpha; \alpha \in [2; 3]\}$$

ERRORI FREQUENTI

L'esercizio sulle eque divisioni ha dato molte difficoltà per la Adjusted Winner, poichè molti hanno dimenticato di riordinare gli oggetti. Nella Proportional Allocation quasi nessuno ha semplificato le frazioni.

Nell'esercizio di programmazione lineare alcuni hanno considerato necessaria la condizione sufficiente di regione ammissibile limitata, ma il non verificarsi della sufficienza non permette di concludere che la regione ammissibile è illimitata.

Nessuna particolare difficoltà per l'esercizio sul nucleo.