PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (INF.) DEL 01/04/2003

1. Risolvere con il metodo di Gauss il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 8x_3 = 3 \end{cases}$$

TEMPO SUGGERITO	15m
PUNTEGGIO	16

2. Sia dato l'omomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definito da:

$$\begin{array}{l} f(2,1,1) = (2,1) \\ f(1,1,1) = (0,-1) \\ f(1,-3,1) = (2,2) \end{array}$$

Determinare $f(4,-1,3)$.

TEMPO SUGGERITO	15m
PUNTEGGIO	14

1. Applicando il metodo di Gauss si ha:

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -8 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - \frac{1}{2}R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -8 & 2 \end{array} \quad R_3 \leftarrow R_3 + 4R_2 \quad \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

   da cui si ricava $x_3 = s; x_2 = -4s - 1; x_1 = 2s + 1.$

2. E' sufficente osservare che

$$(4, -1, 3) = (2, 1, 1) + (1, 1, 1) + (1, -3, 1)$$

   e quindi si ha:

$$f(4, -1, 3) = f(2, 1, 1) + f(1, 1, 1) + f(1, -3, 1) = (2, 1) + (0, -1) + (2, 2) = (4, 2)$$

ERRORI FREQUENTI

Nel primo esercizio qualche studente ha confuso la condizione di infinite soluzioni con quella di sistema incompatibile; altri hanno scambiato la prima e l'ultima colonna, ma essendo questa quella dei termini noti, non si ottiene nessuna informazione sul rango della matrice dei coefficienti.

Il secondo esercizio ha dato moltissime difficoltà, pur essendo molto semplice ed immediato; era possibile la soluzione tramite un sistema che fornisse il trasformato dei vettori della base.