PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (INF.) DEL 01/07/2003

1. Si consideri lo spazio vettoriale U dei polinomi di grado minore o uguale a 2 a coefficienti reali, con le usuali operazioni di somma e prodotto per scalari.

   a. Dire se il sottoinsieme $V \subset U$ formato dai polinomi di grado 2 aventi le radici coincidenti è un sottospazio vettoriale di U.

   b. Dire se il sottoinsieme $W \subset U$ formato dai polinomi aventi la somma dei coefficienti uguale a 0 è un sottospazio vettoriale di U.

   In entrambi i casi giustificare la risposta.

TEMPO SUGGERITO	15m
PUNTEGGIO	15

2. Determinare l'intersezione dei tre piani nello spazio euclideo definiti dalle equazioni:

$$\begin{aligned} &\pi_1 : 2x + y - 3z = 0 \\ &\pi_2 : x - y + z = 1 \\ &\pi_3 : 4x - y - z = 2 \end{aligned}$$

TEMPO SUGGERITO	15m
PUNTEGGIO	15

1. a. V non è un sottospazio vettoriale di U; infatti il polinomio nullo non ha grado 2.

   b. W è un sottospazio vettoriale di U; infatti dati due polinomi $ax^2 + bx + c, a'x^2 + b'x + c' \in W$, cioè con $a + b + c = a' + b' + c' = 0$ e due scalari λ e μ il polinomio combinazione lineare si può scrivere come $(\lambda a + \mu a')x^2 + (\lambda b + \mu b')x + (\lambda c + \mu c')$ con $(\lambda a + \mu a') + (\lambda b + \mu b') + (\lambda c + \mu c') = \lambda(a + b + c) + \mu(a' + b' + c') = 0$ per cui appartiene a W.

2. Il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ 4x - y - z = 2 \end{cases}$$

ha matrice completa:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

che si riduce a:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice ha rango 2 per cui l'intersezione dei tre piani è una retta la cui equazione si ottiene prendendo due equazioni linearmente indipendenti, ad esempio la prima e la seconda:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

ERRORI FREQUENTI