

1. Risolvere col metodo di Gauss il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 - 8x_2 - x_3 = -2 \\ -x_1 - 7x_2 - 5x_3 = -4 \end{cases}$$

TEMPO SUGGERITO 20m
 PUNTEGGIO 15

2. Dato lo spazio vettoriale V delle matrici 2×2 a coefficienti reali, con le usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale. Dire se l'insieme $U = \{A \in V \text{ t.c. } a_{12} + a_{21} \geq 0\}$ e l'insieme $W = \{A \in V \text{ t.c. } a_{12} = 0 \text{ oppure } a_{21} = 0\}$ sono sottospazi vettoriali di V .

TEMPO SUGGERITO 20m
 PUNTEGGIO 15

1. La matrice completa è:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -8 & -1 & -2 \\ -1 & -7 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

Dopo la prima iterazione dell'eliminazione di Gauss si ottiene:

$$\begin{array}{l} \dots \\ \text{II}-2\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \\ \text{IV}+\text{I} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -2 \\ 0 & -10 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Dopo la seconda iterazione dell'eliminazione di Gauss si ottiene:

$$\begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \text{III}+\text{II} \\ \text{IV}+2\text{II} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A ritroso si ottiene:

$$x_3 = t$$

$$x_2 = \frac{1}{5}(2 - 2t)$$

$$x_1 = 3\frac{1}{5}(2 - 2t) - t = \frac{1}{5}(6 - 11t)$$

2. Dati $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in U$ e $\alpha = -1$ si ha $\alpha A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, con $a_{12} + a_{21} = -2 < 0$ e quindi U non è un sottospazio vettoriale di V .
 Date $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in U$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$ si ha $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, con a_{12} e $a_{21} \neq 0$ e quindi W non è un sottospazio vettoriale di V .

ERRORI FREQUENTI

Nessuna particolare difficoltà nel primo esercizio.

Il secondo esercizio qualche studente ha cercato di dimostrare la proprietà di sottospazio vettoriale tramite un esempio e non con una dimostrazione generale.