

1. Si consideri l'omomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $v_1 = (1, 0, -1, 0)$, $v_2 = (2, 1, 0, 1)$, $v_3 = (3, 1, -1, 1)$, $v_4 = (1, 1, 1, 1)$, $v_5 = (0, 1, 1, 0)$ appartengono al nucleo e $f(3, 3, 0, 1) = (1, 1)$.

a. Determinare una rappresentazione matriciale dell'omomorfismo f .

b. Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f .

TEMPO SUGGERITO 20m

PUNTEGGIO 15

2. Dire se le seguenti relazioni sono di equivalenza, cioè riflessive, simmetriche e transitive:

a. " $|x - y| < 1$ " sull'insieme dei numeri reali.

b. " $|x - y| < 1$ " sull'insieme dei numeri interi.

TEMPO SUGGERITO 20m

PUNTEGGIO 15

1. a. I vettori v_1, \dots, v_5 non sono linearmente indipendenti ($v_3 = v_1 + v_2, v_4 = v_2 - v_1$) e un sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti è dato dai vettori v_1, v_2, v_5 e il vettore $(3, 3, 0, 1)$ è linearmente indipendente da questi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In questo modo si ottiene una base di \mathbb{R}^4 , per cui una rappresentazione matriciale di f è data da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b. Per quanto detto $\ker f = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_5)$ e $\text{im } f = \mathcal{L}(1, 1)$.
2. a. La relazione sui numeri reali " $|x - y| < 1$ " soddisfa la riflessività ($|x - x| = 0$) e la simmetria ($|x - y| < 1 \Rightarrow |y - x| < 1$) ma non la transitività ($|x - y| < 1, |y - z| < 1 \not\Rightarrow |x - z| < 1$).
- b. La relazione sui numeri interi " $|x - y| < 1$ " soddisfa sempre la riflessività e la simmetria ma anche la transitività poichè equivale alla relazione " $x = y$ ".

ERRORI FREQUENTI

Nel primo esercizio la difficoltà maggiore è stata "mettere insieme" concetti quali base, generatori, ecc. in modo da "costruire" la soluzione dell'esercizio.

Nel secondo esercizio è risultata complessa la definizione di relazione.