GEOMETRIA - I prova intermedia	11 Febbraio 2008

Esercizio 1

Sia $\mathbf{B} = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$ una base ortonormale positiva di V_3. Dati i vettori $\mathbf{u} = \mathbf{3b_2} + \mathbf{4b_3}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{6b_1} + \mathbf{8b_3}$ determinare un vettore $\mathbf{w}$ che verifichi le tre proprietà seguenti simultaneamente:

1. $\mathbf{w}$ appartenga al piano generato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$;
2. l'angolo formato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ sia uguale all'angolo formato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$;
3. $\|\mathbf{w}\| = 1$.

SOLUZIONE

Siano $\mathbf{u} = (0, 3, 4)$, $\mathbf{v} = (6, 0, 8)$ e $\mathbf{w} = (a, b, c)$.
La condizione 1. richiede $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$, cioè $24a + 24b - 18c = 0$.
La condizione 2. richiede $\cos(\mathbf{uw}) = \cos(\mathbf{wv})$, cioè $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{w}\|} = \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|}$, cioè $\dfrac{3b+4c}{5} = \dfrac{6a+8c}{10}$.
La condizione 3. richiede $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
Per determinare $\mathbf{w}$ basta quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4a + 4b - 3c = 0 \\ 6b + 8c = 6a + 8c \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo si ottiene $\mathbf{w} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{82}}(3, 3, 8)$.

Esercizio 2

Si considerino le due rette $r : x + ky = 2$ e $s : x + y = h$.
Determinare la mutua posizione delle due rette r ed s al variare dei parametri reali k e h.

SOLUZIONE

A partire dal sistema:

$$\begin{cases} x + ky = 2 \\ x + y = h \end{cases}$$

si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

che applicando il metodo di Gauss diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & 1-k & h-2 \end{pmatrix}$$

Se $k \neq 1$ si ha una sola soluzione e quindi le rette sono incidenti.
Se $k = 1$ il sistema ha infinite soluzioni se $h = 2$ e quindi le rette sono coincidenti e non ha soluzioni se $h \neq 2$ e quindi le rette sono parallele.