GEOMETRIA - II prova intermedia		11 Marzo 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Scegliere $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ in modo che le condizioni sotto elencate definiscano un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un cui autovalore sia 3.

$$f(1,1,0) = (2,2,0) \qquad f(0,2,0) = (-1,1,0) \qquad f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}.$$

Dire se f è diagonalizzabile.
Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 18 punti

SOLUZIONE: Affinché la scelta di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ dia luogo con le condizioni richieste ad un'unica applicazione lineare è sufficiente che $B = \{(1,1,0), (0,2,0), \mathbf{v}\}$ sia un base di $\mathbb{R}^3$. Pertanto basta scegliere ad esempio $\mathbf{v} = (0,0,1)$.
Detto $\mathbf{w} = (a,b,c)$, si ha

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Quindi il polinomio caratteristico è:

$$p(\lambda) = \det(M_{BB}(f) - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)(c-\lambda).$$

Gli autovalori sono pertanto $\lambda = 1, 2, c$, e quindi $c = 3$. a e b possono essere qualsiasi, ad esempio 0. Poiché $p(\lambda)$ ha tre radici reali distinte f è diagonalizzabile.

GEOMETRIA - II prova intermedia		11 Marzo 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Siano dati il piano $\pi : x - 2y + 2z - 3 = 0$ e il punto $P = (0, 1, 1)$.

a. determinare la retta r ortogonale a π e passante per P.

b. determinare il punto P' simmetrico di P rispetto a π.

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 15 punti
SOLUZIONE

a. Il vettore ortogonale al piano π è $n_\pi = (1, -2, 2)$, per cui la retta r in forma parametrica è data da:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -2t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$$

b. La distanza tra P e π è data da:

$$d(P, \pi) = \frac{|0 - 2 + 2 - 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 1$$

Quindi P' è l'altro punto della retta r avente distanza da π uguale a 1, cioè basta imporre la condizione:

$$\frac{|t + 4t - 2 + 4t + 2 - 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 1$$

da cui si ottiene $t = 0$ che corrisponde al punto P e $t = \dfrac{2}{3}$ che fornisce il punto $P' = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$.