GEOMETRIA - Esame		30 Giugno 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Sia $\Phi_c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita rispetto alla base canonica dalla matrice:

$$M_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & c+1 & c+1 \\ 1 & c & 1 \end{bmatrix}$$

1. Dire per quali $c \in \mathbb{R}$ Φ_c è invertibile;
2. Per i c per cui Φ_c non è invertibile calcolare una base del nucleo di Φ_c.

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 16 punti

SOLUZIONE **Esercizio 1**:
1) La funzione Φ_c è invertibile se e solo se il determinante della matrice $M_c \neq 0$. Sviluppando il determinante di M_c rispetto alla prima riga otteniamo:

$$\det M_c = -(3 - (c+1)).$$

Pertanto Φ_c è invertibile se e solo se $c \neq 2$.

2) Supponiamo ora $c = 2$. Si ha:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sia $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si ha: $v \in \mathrm{Ker}\Phi_2$ se e solo se

$$\begin{cases} & & y & & & = & 0 \\ 3x & + & 3y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è quindi dato da

$$S = \{(-z, 0, z) \ : \ z \in \mathbb{R}\}.$$

Siccome $S = \{z(-1, 0, 1) \ : z \in \mathbb{R}\}$, una base di $\mathrm{Ker}\Phi_2$ è $\{(-1, 01)\}$.

GEOMETRIA - Esame		30 Giugno 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in $\mathbb{R}^2$, determinare la circonferenza avente il centro sulla retta $s : x + 4y - 1 = 0$ e tangente alla bisettrice del primo e terzo quadrante e all'asse delle ascisse.
Completare con una rappresentazione grafica accurata.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 17 punti

SOLUZIONE **Esercizio 2**:
Un punto P della retta s ha coordinate $(1 - 4t, t)$. La distanza di P dalla bisettrice b è data da:

$$d(P, b) = \frac{|1 - 4t - t|}{\sqrt{2}} = \frac{|1 - 5t|}{\sqrt{2}}$$

La distanza di P dall'asse delle ascisse è data da $|t|$. Imponendo che le due distanze siano uguali si ha:

$$\frac{|1 - 5t|}{\sqrt{2}} = |t| \Leftrightarrow (1 - 5t)^2 = 2t^2$$

che ha soluzioni $t = \dfrac{5 - \sqrt{2}}{23}$ e $t = \dfrac{5 + \sqrt{2}}{23}$.
La prima circonferenza ha centro $\left(\dfrac{3 + 4\sqrt{2}}{23}, \dfrac{5 - \sqrt{2}}{23}\right)$ e raggio $r = \dfrac{5 - \sqrt{2}}{23}$; la seconda circonferenza ha centro $\left(\dfrac{3 - 4\sqrt{2}}{23}, \dfrac{5 + \sqrt{2}}{23}\right)$ e raggio $r = \dfrac{5 + \sqrt{2}}{23}$.
Le due equazioni sono:

$$\left(x - \frac{3 + 4\sqrt{2}}{23}\right)^2 + \left(y - \frac{5 - \sqrt{2}}{23}\right)^2 = \left(\frac{5 - \sqrt{2}}{23}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{3 - 4\sqrt{2}}{23}\right)^2 + \left(y - \frac{5 + \sqrt{2}}{23}\right)^2 = \left(\frac{5 + \sqrt{2}}{23}\right)^2$$