GEOMETRIA - Esame		21 Luglio 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Provare che il seguente sistema lineare ha un'unica soluzione e determinarla utilizzando il metodo di riduzione di Gauss:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ + y + z = 1 \\ - y + 2z = 3 \\ x + y + 4z = 6 \end{cases}$$

Tempo suggerito: 30 minuti
Punteggio: 16 punti

GEOMETRIA - Esame		21 Luglio 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

In un riferimento cartesiano ortogonale (O, x, y), siano dati i punti $P = (1, 2)$ e $Q = (3, 0)$.

a) Determinare la retta r passante per il punto medio M del segmento PQ e per l'origine.

b) Determinare l'area del triangolo delimitato dalla retta r, dall'asse delle ascisse e dalla retta passante per i punti P e Q.

c) Determinare l'area del triangolo OPM.

d) Dare una rappresentazione grafica accurata del problema.

Tempo suggerito: XX minuti
Punteggio: YY punti

SOLUZIONE **Esercizio 1**:

Sia A la matrice dei coefficienti e $A|b$ la matrice completa del sistema, ottenuta aggiungendo ad A la colonna dei termini noti, che chiamiamo b:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

Si vede facilmente che la caratteristica della matrice A (che indichiamo con $r(A)$) è uguale a 3, infatti il determinante della sottomatrice 3×3 di A ottenuta eliminando l'ultima riga è diverso da zero:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 1(2+1) = 3.$$

Vediamo ora qual è la caratteristica della matrice completa. Poiché $r(A|b) \geq r(A)$, certamente $r(A|b) \geq 3$. Proviamo che è 3. Per fare questo basta provare che $\det(A|b) = 0$. Ma questo segue dal fatto che l'ultima riga si ottiene sommando le altre tre.

Poiché abbiamo provato che $r(A) = r(A|b) = 3$, dove 3 è il numero delle incognite, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ha una ed una sola soluzione.

Per determinarla usiamo il procedimento di riduzione di Gauss. Possiamo cancellare l'ultima riga perché è combinazione delle altre.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right].$$

Dall'ultima equazione si ottiene $z = 4/3$. Sostituendo nella seconda si ottiene:

$$y = 1 - 4/3 \Rightarrow y = -1/3,$$

ed infine sostituendo nella prima:

$$x = 2 + 1/3 - 4/3 = 1.$$

Quindi l'unica soluzione del sistema è $(1, -1/3, 4/3)$.

SOLUZIONE **Esercizio 2**:

a) Il punto M ha coordinate $\left(\dfrac{1+3}{2}, \dfrac{2+0}{2}\right) = (2, 1)$.
La retta r è data da $\dfrac{x-2}{0-2} = \dfrac{y-1}{0-1}$ da cui $r : x - 2y = 0$.

b) E' sufficiente osservare che il triangolo ha per base il segmento OQ di lunghezza 3 la cui altezza è data dall'ordinata di M. L'area è $\dfrac{3}{2}$.

c) E' sufficiente osservare che l'area è uguale a quella del triangolo OMQ, avendo basi uguali PM e PQ e le relative altezze.

d)