GEOMETRIA - Esame		17 Settembre 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determinare $f(x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

b) Trovare due basi diverse del nucleo di f.

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 16 punti

Esercizio 2

In un riferimento cartesiano ortogonale (O, x, y, z), siano dati i punti $P = (3, 0, 2)$ e $Q = (1, -2, 0)$.

a) Determinare le coordinate del punto medio M del segmento PQ.

b) Determinare la retta r passante per i punti P e Q.

c) Determinare il piano π perpendicolare alla retta r e passante per il punto M.

d) Determinare la sfera Γ di centro M e passante per i punti P e Q.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 17 punti

SOLUZIONE **Esercizio 1**:

a) Poiché la matrice associata ad f rispetto alla base canonica è M si ha:

$$f(1,0,0) = (1,0,1), \qquad f(0,1,0) = (2,2,0), \qquad f(0,0,1) = (2,1,1),$$

da cui si ottiene

$$f(x,y,z) = x(1,0,1) + y(2,2,0) + z(2,1,1) = (x+2y+2z, 2y+z, x+z).$$

b) $(x,y,z) \in \mathrm{Ker} f \iff f(x,y,z) = (0,0,0)$, o equivalentemente (x,y,z) risolve il sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Scambiando la seconda e la terza riga si ottiene:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

e sostituendo la seconda riga con la seconda riga meno la prima:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

E quindi:

$$\begin{cases} x = 2y \\ z = -2y \end{cases}$$

Si ha di conseguenza

$$\ker f = \{(2y, y, -2y) \ : \ y \in \mathbb{R}\}$$

Una base è dunque data dal vettore $(2,1,-2)$, e un'altra dal vettore $(4,2,-4)$.

SOLUZIONE **Esercizio 2**:

a) Il punto M ha coordinate $\left(\dfrac{3+1}{2}, \dfrac{0-2}{2}, \dfrac{2+0}{2}\right) = (2,-1,1)$.

b) Il vettore direzionale della retta r è $u_r = P - Q = (2,2,2)$.
La retta r è data da $\begin{cases} x = 2t+3 \\ y = 2t \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t+2 \end{cases}$.

c) Osservando che il vettore ortogonale al piano $n_\pi = u_r$, imponendo il passaggio per il punto M si ha:

$$\pi : 2(x-2) + 2(y+1) + 2(z-1) = 0 \rightarrow \pi : x + y + z - 2 = 0$$

d) Il raggio della sfera è dato da $PM = MQ = \sqrt{(3-2)^2 + (0+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{3}$, per cui:

$$\Gamma : (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 3 \rightarrow \Gamma : x^2 + x^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 3 = 0$$