Esame di GEOMETRIA		18 Dicembre 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(x, y, z) = (y, x, 0)$.

1. Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica.
2. Trovare la dimensione e una base di $\mathrm{Im} f$.
3. Trovare la dimensione e una base di $\ker f$.
4. Trovare gli autovalori di f.
5. Dire se f è diagonalizzabile.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 18 punti

Esame di GEOMETRIA		18 Dicembre 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

1. Determinare la retta r passante per i punti $A = (1, 0, 2)$ e $B = (2, 1, 1)$.
2. Determinare il piano π ortogonale alla retta r e passante per il punto $P = (5, 0, 0)$.
3. Determinare il punto Q di intersezione tra la retta r e il piano π.

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1:

1. Risulta:
$$f(1,0,0) = (0,1,0) \qquad f(0,1,0) = (1,0,0) \qquad f(0,0,1) = (0,0,0),$$
pertanto la matrice associata ad f rispetto alla base canonica è:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Un sistema di generatori dell'immagine di f è costituito dalle colonne della matrice A, pertanto una base di $\mathrm{Im} f$ è data da:
$$B = \{(0,1,0), (1,0,0)\},$$
essendo questi due vettori linearmente indipendenti. In particolare si ha $\dim \mathrm{Im} f = 2$.

3. Dal teorema di nullità sappiamo:
$$\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = 3$$
e quindi otteniamo che $\dim \ker f = 1$. Poiché $f(0,0,1) = (0,0,0)$ una base del nucleo di f è costituita dal vettore $(0,0,1)$.

4. Gli autovalori di f sono gli autovalori della matrice A. Per trovarli basta scrivere il polinomio caratteristico, che per definizione è $p(x) = \det(\lambda I - A)$. Nel nostro caso quindi:
$$p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 1)$$
e quindi gli autovalori sono 1, -1 e 0.

5. Poiché f ha tre autovalori distinti, è diagonalizzabile.

SOLUZIONE 2:

1. Il vettore u_r è dato da $B - A = (1,1,-1)$ e quindi la retta r ha equazione parametrica:
$$r : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = -t + 2 \end{cases}$$

2. Osservando che $n_\pi = u_r$ si ottiene $\pi : x + y - z - 5 = 0$.

3. Sostituendo le coordinate del generico punto di r si ottiene $t = 2$ e quindi $Q = (3,2,0)$.