Esame di GEOMETRIA		8 Gennaio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Tempo suggerito: 30 minuti
Punteggio: 18 punti

Definiamo

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x - 4y + z = 0\}.$$

1. Provare che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$;
2. Determinare la dimensione e una base di V;
3. Provare che non esiste un'applicazione lineare surgettiva $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\ker f = V$.

Esame di GEOMETRIA		8 Gennaio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Sia dato il piano $\pi : 3x - y + 2z = 11$.

1. Determinare la retta r ortogonale al piano π e passante per il punto $A = (1, 0, -3)$.
2. Determinare il punto P di intersezione tra la retta r e il piano π.
3. Determinare la distanza del punto A dal piano π.

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1:

1. V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ perché è l'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare. Altrimenti, utilizzando la definizione si verifica facilmente che, presi $v_1, v_2 \in V$ si ha $v_1 + v_2 \in V$ e dato $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda v \in V$.

2. Determiniamo una base di V e da lì deduciamo la sua dimensione. Si ha:

$$P = (x, y, z) \in V \Leftrightarrow x = 4y - z,$$

perció $P \in V$ se e solo se si puó scrivere come:

$$P = (4y - z, y, z) = y(4, 1, 0) + z(-1, 0, 1).$$

Questo implica che i vettori $(4, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$ sono un sistema di generatori di V. Siccome sono anche linearmente indipendenti (verificare), sono una base di V. Pertanto V ha dimensione 2.

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare e surgettiva. Per definizione di surgettività si ha $\dim \mathrm{Im} f = 2$ e quindi, dal teorema di nullità, $\dim \ker f = 3 - 2 = 1$. Siccome $\dim V = 2$ non esiste un'applicazione lineare con le proprietà richieste.

SOLUZIONE 2:

1. Il vettore $n_\pi = u_r$ è dato da $(3, -1, 2)$ e quindi la retta r ha equazione parametrica:

$$r : \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -t \\ z = 2t - 3 \end{cases}$$

2. Sostituendo le coordinate del generico punto di r si ottiene $t = 1$ e quindi $P = (4, -1, -1)$.

3. Calcolando la distanza da P ad A si ha $d(P, A) = \sqrt{(4-1)^2 + (-1)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{14}$.