GEOMETRIA - Esame		17 Marzo 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $f(x, y, z) = (0, 2x + y + z, z)$.

1. provare che f è un'applicazione lineare e trovare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica;
2. trovare la dimensione e una base di $\ker f$;
3. trovare la dimensione e una base di $\mathrm{Im} f$;
4. trovare gli autovalori di f e calcolarne la molteplicità.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 18 punti

GEOMETRIA - Esame		17 Marzo 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in $\mathbb{R}^3$

1. determinare l'equazione del piano π passante per la retta $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ e per il punto $P_0 = (2, 0, 0)$;
2. determinare il punto Q della retta r per cui il triangolo AP_0Q, con $A = (1, 1, 0)$, ha superficie $\frac{1}{2}$.

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE:

1. La linearità segue immediatamente dalla definizione. Siano infatti (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha
$$f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = (0, 2(x_1 + x_2) + y_1 + y_2 + z_1 + z_2, z_1 + z_2) = f((x_1, y_1, z_1)) + f((x_2, y_2, z_2))$$
e, preso $a \in \mathbb{R}$:
$$f(a(x_1, y_1, z_1)) = af((x_1, y_1, z_1)),$$
quindi f è lineare. La matrice associata ad f rispetto alla base canonica è
$$A = M_{EE}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. $(x, y, z) \in \mathrm{Ker} f$ se e solo se è soluzione del sistema
$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
Si ha quindi
$$\ker f = \{(x, -2x, 0) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -2, 0) \rangle.$$
Pertanto la dimensione del nucleo è 1 e una base è data dal vettore $(1, -2, 0)$.
3. Per il teorema di nullità si ha:
$$\dim \mathrm{Im} f + \dim \ker f = 3$$
e quindi l'immagine ha dimensione 2. Siccome $\mathrm{Im} f = \langle (0, 2, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$, una base dell'immagine è data da $\{(0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.
4. per trovare gli autovalori di f basta trovare il polinomio caratteristico:
$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(1-\lambda)^2.$$
Gli autovalori sono 0 di molteplicità 1 e 1 di molteplicità 2.

SOLUZIONE:

1. Due punti della retta r sono $P_1 = (1, 0, 0)$ e $P_2 = (1, 2, 1)$; il piano π è il piano passante per P_0, P_1, P_2 cioè $(P - P_1) \wedge (P_2 - P_1) \cdot (P_0 - P_1) = 0$ che si ottiene da
$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
da cui si ha $\pi : y - 2z = 0$
2. Il punto $Q = (1, 2t, t)$ deve soddisfare $\frac{1}{2}||(P_0 - A) \wedge (Q - A)|| = \frac{1}{2}$ dove $(P_0 - A) \wedge (Q - A) = (1, -1, 0) \wedge (0, 2t - 1, t) = (-t, -t, 2t - 1)$ e quindi $\frac{1}{2}\sqrt{t^2 + t^2 + 4t^2 - 4t + 1} = \frac{1}{2}$ da cui si ottiene $t = 0$ e $t = \frac{2}{3}$ e quindi $Q' = (1, 0, 0)$ e $Q'' = \left(1, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.