PROVA SCRITTA DI MATEMATICA FINANZIARIA A DEL 17/03/08

Approssimare i calcoli alla seconda cifra decimale

1. Un capitale C di 50000 euro viene investito in un titolo a cedola fissa semestrale posticipata al tasso annuo del 4% di durata triennale, che viene rimborsato alla scadenza con un premio pari all'1% del capitale investito. Gli interessi vengono di volta in volta investiti in un piano al tasso annuo del 3% con capitalizzazione composta trimestrale.

   a. Calcolare il capitale complessivo al termine dei tre anni.

   b. Calcolare il tasso di interesse semplice equivalente.

   TEMPO SUGGERITO 20m
   PUNTEGGIO 12

2. Si consideri il problema di programmazione lineare:

$$\begin{array}{ll} max & z = x_1 + 2x_2 \\ s.t. & x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1 + x_3 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

   a. Determinare una soluzione ottimale col metodo del simplesso, scegliendo la variabile uscente più a sinistra e la variabile entrante più in alto.

   b. Scrivere il problema duale in forma analitica.

   c. Determinare una soluzione ottimale del problema duale.

   TEMPO SUGGERITO 25m
   PUNTEGGIO 18

SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 17/03/08

1. a. Il valore delle cedole è $\dfrac{50000 \times 4 \times 0.5}{100} = 1000$ euro; il premio finale è $\dfrac{50000 \times 1}{100} = 500$ euro. Il rendimento del piano può essere calcolato cedola per cedola, ricordando che il tasso annuo del 3% con capitalizzazione composta trimestrale equivale al tasso composto trimestrale del 0.75%:

   i $1000(1.0075)^{10} = 1077.58$ euro
   ii $1000(1.0075)^{8} = 1061.60$ euro
   iii $1000(1.0075)^{6} = 1045.85$ euro
   iv $1000(1.0075)^{4} = 1030.34$ euro
   v $1000(1.0075)^{2} = 1015.06$ euro
   vi $1000(1.0075)^{0} = 1000.00$ euro

   quindi 6230.43 euro complessivi. Aggiungendo il premio e il capitale iniziale si ottiene 56730.43 euro.

   b. Il tasso di interesse semplice equivalente si ottiene osservando che l'interesse dell'investimento è di 6730.43 euro. Da qui si ottiene $i = \dfrac{6730.43 \times 100}{50000 \times 3} = 4.49\%$.

2. a. Riportando il problema in forma canonica si ha:

$$\begin{array}{ll} max & z = x_1 + 2x_2 \\ s.t. & x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ & -x_1 - x_3 \leq -2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

   Applicando l'algoritmo richiesto si ha:

	x_1	x_2	x_3	
u_1	$\boxed{-1}$	-1	-1	10
u_2	1	0	1	-2
z	1	2	0	0

	u_1	x_2	x_3	
x_1	-1	-1	-1	10
u_2	-1	$\boxed{-1}$	0	8
z	-1	1	-1	10

	u_1	u_2	x_3	
x_1	0	1	-1	2
x_2	-1	-1	0	8
z	-2	-1	-1	18

   La soluzione ottimale è $x^* = (2, 8, 0)$ e $z^* = 18$.

   b. A partire dalla forma canonica del problema dato si ha:

$$\begin{array}{ll} min & w = 10u_1 - 2u_2 \\ s.t. & u_1 - u_2 \geq 1 \\ & u_1 \geq 2 \\ & u_1 - u_2 \geq 0 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{array}$$

   c. Dalla tabella ottimale del problema dato si ha $u^* = (2, 1)$ e $w^* = 18$.