PROVA SCRITTA DI MATEMATICA FINANZIARIA A DEL 30/06/08

Approssimare i calcoli alla seconda cifra decimale

1. Un capitale C di 5000 euro viene investito per 3 anni al tasso annuo composto del 3%. Avendo la possibilità di recedere al termine del secondo anno per un investimento che l'anno successivo rende il 6%, conviene rescindere l'investimento sapendo che la penale è pari a 100 euro e che il secondo investimento ha un costo di chiusura di 50 euro?

   TEMPO SUGGERITO 15m
   PUNTEGGIO 10

2. Si consideri il problema di programmazione lineare:

$$\begin{array}{ll} max & z = x_1 + 2x_2 \\ s.t. & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

   a. Determinare una soluzione ottimale col metodo del simplesso, scegliendo la variabile uscente più a sinistra e la variabile entrante più in basso.
   b. Rappresentare graficamente sul piano cartesiano il problema, identificando i punti via via trovati.
   c. Scrivere la forma analitica del problema duale.
   d. Determinare la regione ottimale del problema duale.

   TEMPO SUGGERITO 30m
   PUNTEGGIO 20

SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 30/06/08

1. Proseguendo l'investimento il montante è:

$$M_1 = 5000 \times (1.03)^3 = 5463.635$$

Recedendo dall'investimento il montante è:

$$M_2 = (5000 \times (1.03)^2 - 100) \times 1.06 - 50 = 5466.770$$

Quindi è più vantaggiosa la seconda alternativa.

2. a. Riportando il problema in forma canonica si ha:

$$\begin{array}{ll} max & z = x_1 + 2x_2 \\ s.t. & x_1 - x_2 \leq -1 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Applicando l'algoritmo richiesto si ha:

$$\begin{array}{c|cc|c} & x_1 & x_2 & \\ \hline u_1 & -1 & 1 & -1 \\ u_2 & -1 & 0 & 2 \\ u_3 & 0 & \boxed{-1} & 3 \\ \hline z & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$x^1 = (0,0)$

$$\begin{array}{c|cc|c} & x_1 & u_3 & \\ \hline u_1 & -1 & -1 & 2 \\ u_2 & \boxed{-1} & 0 & 2 \\ x_2 & 0 & -1 & 3 \\ \hline z & 1 & -2 & 6 \end{array}$$

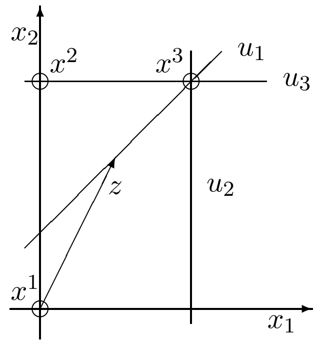
$x^2 = (0,3)$

$$\begin{array}{c|cc|c} & u_2 & u_3 & \\ \hline u_1 & 1 & -1 & 0 \\ x_1 & -1 & 0 & 2 \\ x_2 & 0 & -1 & 3 \\ \hline z & -1 & -2 & 8 \end{array}$$

$x^3 = (2,3)$

La soluzione ottimale è $x^* = (2,3)$ e $z^* = 8$.

b. Il problema può essere rappresentato come:



c. La forma analitica del problema duale è:

$$\begin{aligned} min \quad & w = -u_1 + 2u_2 + 3u_3 \\ s.t. \quad & u_1 + u_2 \geq 1 \\ & -u_1 + u_3 \geq 2 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{aligned}$$

d. Dalla tabella ottimale del primale si ricava che una soluzione ottimale del duale è $u^* = (0, 1, 2), w^* = 8$, ma la presenza del termine noto nullo in corrispondenza di u_1 ci dice che il duale potrebbe avere altre soluzioni ottimali. Una ulteriore iterazione del simplesso sulla tabella primale (ma è indifferente usare la tabella duale) porta alla nuova tabella

	u_1	u_3	
u_2	1	1	0
x_1	-1	-1	2
x_2	0	-1	3
z	-1	-3	8

da cui si ricava che una nuova soluzione ottimale del duale è $u^{**} = (1, 0, 3), w^* = 8$. Quindi la regione ottimale del duale è il segmento di estremi u^* e u^{**}.