PROVA SCRITTA DI TEORIA DEI GIOCHI A DEL 18/12/08

1. Si consideri il problema di programmazione lineare:

$$\begin{array}{ll} min & z = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ s.t. & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \geq 1 \\ & x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

   a. Determinare una soluzione ottimale col metodo del simplesso, scegliendo la variabile uscente più a sinistra e la variabile entrante più in alto.

   b. Determinare la regione ottimale.

   TEMPO SUGGERITO 30m
   PUNTEGGIO 18

2. Si consideri il progetto rappresentato dal seguente schema:

Attività	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
Durata	6	2	4	7	3
Precedenze	*C*	*C*	*D*		
	D	*E*	*E*		

   a. Determinare il modello CPM di Roy.

   b. Determinare la durata minima dl progetto.

   c. Determinare le attività critiche.

   TEMPO SUGGERITO 15m
   PUNTEGGIO 12

SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 18/12/08

1. a. Riportando il problema in forma canonica si ha:

$$\begin{array}{ll} max & -z = -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \\ s.t. & -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq -1 \\ & -x_1 + x_2 - 4x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Applicando l'algoritmo richiesto si ha:

	x_1	x_2	x_3	
u_1	2	-3	4	-1
u_2	$\boxed{1}$	-1	4	-1
$-z$	-2	3	-5	0

	u_2	x_2	x_3	
u_1	2	$\boxed{-1}$	-4	1
x_1	1	1	-4	1
$-z$	-2	1	3	-2

	u_2	u_1	x_3	
x_2	2	-1	4	1
x_1	3	-1	-8	2
$-z$	0	-1	-1	-1

La soluzione ottimale è $x^* = (2, 1, 0)$ e $z^* = 1$.

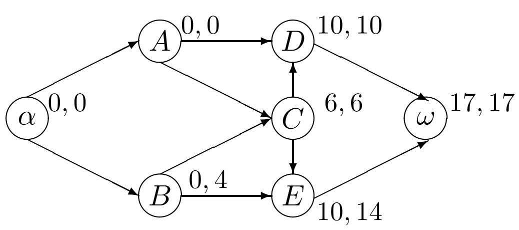
b. La regione ottimale è identificata dal sistema:

$$\begin{cases} u_2 \geq 0 \\ u_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 1 \geq 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$S_{ott} = \left\{ \left(\frac{1+3\alpha}{2}, \alpha, 0 \right) \in \mathbb{R}^3 \ s.t. \ \alpha \geq 1 \right\}$$

2. a. Determinare il modello CPM di Roy.



b. La durata minima dl progetto è 17.

c. Le attività critiche sono A, C, D.

PROVA SCRITTA DI TEORIA DEI GIOCHI B DEL 18/12/08

1. Si consideri il gioco TU definito dalla seguente funzione caratteristica:

S	1	2	3	12	13	23	123
$v(S)$	1	1	1	a	2	3	4

   a. Per quali valori di a il gioco è coesivo?

   b. Per quali valori di a il gioco è superadditivo?

   c. Per quali valori di a il gioco è convesso?

   d. Per quali valori di a il gioco è bilanciato?

   TEMPO SUGGERITO 25m
   PUNTEGGIO 16

2. Si consideri il seguente problema di contrattazione a due giocatori:

$$d = (0, 0); F = \{(x_1, x_2) \text{ s.t. } x_1^2 + 2x_1 + x_2 - 3 \leq 0; x_1, x_2 \geq 0\}$$

   a. Determinare la soluzione di Nash.

   b. Determinare la soluzione di Kalai-Smorodinsky.

   TEMPO SUGGERITO 20m
   PUNTEGGIO 14

1.

S	1	2	3	12	13	23	N
$v(S)$	1	1	1	a	2	3	4

a. Il gioco è coesivo se $v(12) + v(3) \leq v(N)$, che è verificata se $a \leq 3$ (le altre relazioni sono indipendenti da a e verificate).

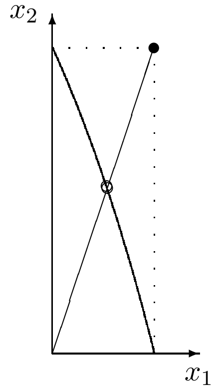
b. Il gioco è superadditivo se $v(1) + v(2) \leq v(12)$ e $v(12) + v(3) \leq v(N)$, che sono verificate se $2 \leq a \leq 3$ (le altre relazioni sono indipendenti da a e verificate).

c. Il gioco è convesso se $v(1) \leq v(12) - v(2)$, $v(2) \leq v(12) - v(1)$, $v(13) - v(1) \leq v(N) - v(12)$, $v(23) - v(2) \leq v(N) - v(12)$, che sono verificate se $a = 2$ (le altre relazioni sono indipendenti da a e verificate).

d. Il gioco è bilanciato se $x(12) \geq v(12)$, $x(13) \geq v(13)$, $x(23) \geq v(23)$ e $x(N) = v(N)$ che non sono verificate se $a > 3$. Per $a \leq 3$ l'allocazione (1,2,1) appartiene al nucleo.

2. a. La soluzione di Nash è data da:

$$\left(\frac{\sqrt{13}-2}{3}, \frac{22-2\sqrt{13}}{9}\right)$$



b. Il punto utopia è $(1, 3)$ e quindi la soluzione di Kalai-Smorodinsky è:

$$\left(\frac{\sqrt{37}-5}{2}, \frac{3\sqrt{37}-15}{2}\right)$$