Prova scritta di Teoria dei Giochi A

21 Luglio 2009

1. Si consideri il problema di programmazione lineare intera a variabili 0-1:

$$\begin{array}{ll} max & z = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ s.t. & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 + x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} \end{array}$$

   a. Determinare e risolvere il rilassamento lagrangiano con pesi uguali a 1.

   b. Determinare e risolvere il rilassamento surrogato con pesi uguali a 1.

   c. Utilizzando le soluzioni ottenute è possibile determinare la soluzione del problema dato?

TEMPO SUGGERITO	25m
PUNTEGGIO	20

2. Si consideri il problema di scheduling con 4 lavori A, B, C e D aventi costi $\alpha = (24, 20, 16, 9)$ e tempi di esecuzione $t = (6, 4, 8, 3)$.

   a. Determinare l'ordinamento ottimale.

   b. Determinare il risparmio rispetto all'ordinamento iniziale $\sigma_0 = (A, B, C, D)$.

TEMPO SUGGERITO	15m
PUNTEGGIO	10

SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 21 Luglio 2009

1. a. Il rilassamento lagrangiano è dato da:

$$\begin{array}{ll} max & z_L = -2x_1 + x_2 - x_3 + 3 \\ s.t. & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{array}$$

Il problema può essere risolto per ispezione osservando che x_1 e x_3 devono assumere valore minimo avendo coefficienti negativi in z_L e x_2 deve assumere valore massimo avendo coefficiente positivo in z_L; quindi $x_L^* = (0, 1, 0)$ con $z_L^* = 4$.

b. Il rilassamento surrogato è dato da:

$$\begin{array}{ll} max & z_S = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ s.t. & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{array}$$

Il problema equivale al problema dello zaino:

oggetto	A	B	C
valore	1	2	1
peso	3	1	2
peso max = 3			
valore/peso	1/3	2	1/2

La prima limitazione $L = \lfloor 2 + 1 \rfloor = 3$ corrisponde ad una soluzione ammissibile e quindi ottimale; quindi $x_S^* = (0, 1, 1)$ con $z_S^* = 3$.

c. x_L^* è ammissibile per il problema dato ma $z(x_L^*) \neq z_L^*$, per cui non è possibile dare una risposta certa.
x_S^* è ammissibile per il problema dato e $z(x_S^*) = z_S^*$, per cui è soluzione ottimale del problema dato.

2. a. Calcolando gli indici di urgenza $u = \frac{\alpha}{t} = (\frac{24}{6}, \frac{20}{4}, \frac{16}{8}, \frac{9}{3})$ si trova l'ordinamento ottimale $\sigma^* = (B, A, D, C)$.

b. Calcolando $C_{\sigma_0} = 24 \cdot 6 + 20 \cdot 10 + 16 \cdot 18 + 9 \cdot 21 = 821$ e $C_{\sigma^*} = 20 \cdot 4 + 24 \cdot 10 + 9 \cdot 13 + 16 \cdot 21 = 773$ si ricava che il risparmio è 48.