Prova parziale di GEOMETRIA		23 Febbraio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Si consideri lo spazio vettoriale U delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali, con le usuali operazioni di somma e prodotto con uno scalare.
Determinare se il sottoinsieme

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ t.c. } a_{11} - a_{12} = 0 \right\}$$

costituisce un sottospazio vettoriale di U.
Tempo suggerito: 15 minuti
Punteggio: 18 punti

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y) = (x - y, x + 1, y - 2x)$.
Determinare se f è un omomorfismo.
Tempo suggerito: 10 minuti
Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE:

1. Siano $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ due elementi di V, per cui $a - b = 0$ ed $e - f = 0$. La matrice $A + B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$ appartiene a V se $(a + e) - (b + f) = (a - b) + (e - f) = 0$, che è vero.
   Si consideri ora uno scalare λ. La matrice $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ appartiene a V se $\lambda a - \lambda b = \lambda(a - b) = 0$, che è vero.
   Quindi V è un sottospazio vettoriale di U.

2. E' sufficiente osservare che $f(0, 0) \neq (0, 0, 0)$.
   Oppure, presi $\mathbf{u} = (a, b)$ e $\mathbf{u} = (c, d)$ si ha $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f((a+c, b+d)) = ((a+c)-(b+d), (a+c)+1, (b+d)-2(a+c))$; invece $f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = (a-b, a+1, b-2a) + (c-d, c+1, d-2c) = ((a+c)-(b+d), (a+c)+2, (b+d)-2(a+c))$.
   Oppure preso uno scalare λ si ha $f(\lambda\mathbf{u}) = f((\lambda a, \lambda b)) = (\lambda a - \lambda b, \lambda a + 1, \lambda b - 2\lambda a)$; invece $\lambda f(\mathbf{u}) = (\lambda(a - b), \lambda(a + 1), \lambda(b - 2a))$.
   Quindi non è un omomorfismo.