Prova scritta di GEOMETRIA		23 Marzo 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Siano dati i punti $P = (2, 1)$ e $Q = (3, -1)$

a. Determinare il punto T simmetrico di P rispetto a Q.

b. Determinare la retta r passante per P e Q.

c. Determinare la retta s ortogonale a r e passante per P.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 15 punti (per la prova parziale 33 punti)

Esercizio 2

Sia dato l'omomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definito da

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_2 + x_3, x_1 + 2x_2, 2x_1 + 2x_2 - x_3)$$

a. Determinare la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche.

b. Determinare il nucleo e l'immagine di f.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1:

a. Applicando la formula si ha $T = (6 - 2, -2 - 1) = (4, -3)$.

b. Applicando la formula si ha $\dfrac{x-2}{3-2} = \dfrac{y-1}{-1-1}$ da cui $r : 2x + y - 5 = 0$.

c. E' la retta ortogonale a $(P - Q) = (-1, 2)$ e passante per P, cioè $(-1, 2) \cdot (x - 2, y - 1) = 0$ da cui $s : x - 2y = 0$.

SOLUZIONE 2:

a. La matrice associata ad f è data da $f(1, 0, 0) = (1, 0, 1, 2)$; $f(0, 1, 0) = (0, 2, 2, 2)$; $f(0, 0, 1) = (-1, 1, 0, -1)$, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b. Applicando la riduzione di Gauss si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \\ \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 2R_1} \end{array} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \\ \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - R_2} \end{array} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dalle prime due relazioni si ottiene a ritroso $x_3 = t, x_2 = -t/2, x_1 = t$ per cui $Kerf = \mathcal{L}((2, -1, 2)); Imf = \mathcal{L}((1, 0, 1, 2), (0, 2, 2, 2))$