Prova scritta di GEOMETRIA		6 Aprile 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Siano dati i punti $P = (3, 1, 0), Q = (2, 0, 1)$ e $R = (0, 0, 1)$

a. Determinare il piano π passante per P, Q, R.

b. Determinare la retta r passante per P e Q.

Tempo suggerito: 15 minuti
Punteggio: 12 punti

Esercizio 2

Sia dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalla matrice A rispetto alle base canonica:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 2 \\ -8 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

a. Determinare gli autovalori e una base per ciascuno degli autospazi.

b. Determinare se f è semplice.

Tempo suggerito: 35 minuti
Punteggio: 18 punti

SOLUZIONE 1:

a. Detto $S = (x, y, z)$ il generico punto di π, dalla formula $\pi : (S - R) \wedge (P - R) \cdot (Q - R) = 0$ si ricava:

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

e quindi $\pi : y + z - 1 = 0$.

b. La retta r è parallela al vettore $(P - Q) = (1, 1, -1)$ da cui $r : \begin{cases} x = t + 3 \\ y = t + 1 \\ z = -t \end{cases}$.

SOLUZIONE 2:

a. L'equazione caratteristica è data da:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & -4-\lambda & 2 \\ -8 & -12 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda(2-\lambda)^2 = 0$$

da cui $\lambda_1 = 0, \mu_1 = 1; \lambda_2 = 2, \mu_2 = 2$.
Per determinare gli autospazi è sufficiente determinare $Ker(f - \lambda_1)$ e $Ker(f - \lambda_2)$.
Nel primo caso si considera il sistema omogeneo associato a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 2 \\ -8 & -12 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha soluzione $x_3 = t, x_2 = \frac{t}{2}, x_1 = 0$, da cui $V_0 = \mathcal{L}((0, 1, 2))$.
Nel secondo caso si considera il sistema omogeneo associato a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 2 \\ -8 & -12 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha soluzione $x_3 = t, x_2 = s, x_1 = \frac{2t-6s}{4}$, da cui $V_2 = \mathcal{L}((1, 0, 2), (3, -2, 0))$.

b. Poichè la molteplicità algebrica degli autospazi coincide con quella geometrica l'endomorfismo f è semplice.