Prova scritta di GEOMETRIA		23 Giugno 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Siano dati il punto $P = (1, 1, 0)$ e la retta $s : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 0 \\ z = t + 1 \end{cases}$. Determinare:

a. il piano π passante per P e ortogonale ad s.

b. il piano ρ passante per P e contenente s.

c. la sfera Γ di centro P e tangente ad s.

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 13 punti

Prova scritta di GEOMETRIA		23 Giugno 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Risolvere con il metodo di Gauss il seguente sistema parametrico, per $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 = 1 \\ kx_1 + x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + (k-1)x_3 = 0 \end{cases}$$

Tempo suggerito: 30 minuti
Punteggio: 17 punti

SOLUZIONE 1:

a. Osservando che $u_s = n_\pi = (2,0,1)$ si ottiene $\pi : 2(x-1)+0(y-1)+1(z-0)=0$, cioè $\pi : 2x+z-2=0$.

b. Il fascio di piani passante per s è dato da $\lambda(y)+\mu(x-2z+3)=0$. Imponendo il passagio per P si trova $\lambda+4\mu=0$, da cui posto $\lambda=-4, \mu=1$ si ottiene $\rho : x-4y-2z+3=0$.

c. Il punto $H = s \cap \pi$ si può ricavare dal sistema che ha come risolvente $4t-2+t+1-2=0 \Rightarrow t=\dfrac{3}{5}$, cioè $H=\left(\dfrac{1}{5},0,\dfrac{8}{5}\right)$. A questo punto il raggio r di Γ è dato da $r=d(P,H)=\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{5}\right)^2+(1-0)^2+\left(0-\dfrac{8}{5}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{105}{25}}$ e quindi $\Gamma : (x-1)^2+(y-1)^2+(z-0)^2=\dfrac{105}{25}$, cioè $\Gamma : 25x^2+25y^2+25z^2-50x-50y-55=0$.

SOLUZIONE 2: Applicando il metodo di Gauss si ha:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ k & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & k-1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow 2R_3 - R_1]{\substack{k\neq 0 \\ R_2 \leftarrow 2R_2 - kR_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2k & -2-k \\ 0 & 4 & 2k & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2k & -2-k \\ 0 & 0 & -2k & 3-2k \end{pmatrix}$$

- $k \neq 0$

$$\begin{cases} x_3 = -\frac{3-2k}{2k} \\ x_2 = -2-2k+2k\frac{3-2k}{2k} = 1-3k \\ x_1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{3-2k}{k}\right) = \frac{3k-3}{2k} \end{cases}$$

- $k = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow 2R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 4R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Impossibile.