Prova scritta di GEOMETRIA		21 Luglio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Sia dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di cui si sa che $Ker(f) = \mathcal{L}((1,2,0),(0,1,0))$ e che $f(u) = u$ se $u \notin Ker(f)$.

a. Determinare una matrice associata all'endomorfismo f.

b. Determinare gli autovalori e una base per ciascuno degli autospazi.

c. Determinare se f è semplice.

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 15 punti

Prova scritta di GEOMETRIA		21 Luglio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Calcolare con il metodo di Gauss il determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1:

a. I vettori $(1,2,0)$ e $(0,1,0)$ sono linearmente indipendenti, per cui per completare una base serve un terzo vettore linearmente indipendente dai primi due, ad esempio $(0,0,1)$, con $f(0,0,1) = (0,0,1)$. La matrice associata ad f rispetto alla base trovata è comunque:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. L'equazione caratteristica è data da:
$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2(1-\lambda) = 0$$
da cui $\lambda_1 = 0, \mu_1 = 2; \lambda_2 = 1, \mu_2 = 1$.
Per determinare gli autospazi è sufficiente determinare $Ker(f - \lambda_1)$ e $Ker(f - \lambda_2)$.
Nel primo caso si considera il sistema omogeneo associato a
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
che ha soluzione $x_3 = 0, x_2 = t, x_1 = s$, da cui $V_0 = \mathcal{L}((1,0,0),(0,1,0))$.
Nel secondo caso si considera il sistema omogeneo associato a
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
che ha soluzione $x_3 = t, x_2 = x_1 = 0$, da cui $V_2 = \mathcal{L}((0,0,1))$.

c. Poichè la molteplicità algebrica degli autospazi coincide con quella geometrica l'endomorfismo f è semplice.

SOLUZIONE 2: Applicando il metodo di Gauss si ha:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1} \\ \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_1} \\ \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 + 2R_1} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 + 2R_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 + 2R_3} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12$$