Prova scritta di GEOMETRIA		18 Febbraio 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Dato un omomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definito da: $f(x, y, z) = (x - y, 2x, y + z, z - x)$

a. Determinare la matrice associata all'omomorfismo rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$.

b. Determinare una base del nucleo e dell'immagine di f.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 17 punti

Prova scritta di GEOMETRIA		18 Febbraio 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Siano dati i punti $A = (1, 0), B = (2, -1)$. Determinare:

a. l'equazione della retta r passante per A, B.

b. l'equazione della retta s perpendicolare ad r e passante per $C = (-2, 1)$.

c. l'intersezione D delle rette r ed s.

Completare con una rappresentazione grafica accurata del problema.

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 13 punti

SOLUZIONE 1:

a. Le colonne della matrice sono ordinatamente $f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. Riducendo la matrice col metodo di Gauss si ottiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \\ \\ \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 + R_1} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{2}R_2} \\ \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 + \frac{1}{2}R_2} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Quindi il nucleo contiene solo il vettore nullo e una base dell'immagine è $f(1,0,0) = (1,2,0,-1), f(0,1,0) = (-1,0,1,0), f(0,0,1) = (0,0,1,1)$.

SOLUZIONE 2:

a. Applicando la formula si ha $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y}{-1}$ da cui $r : x + y - 1 = 0$.

b. Applicando la formula si ha $(x+2) - (y-1) = 0$ da cui $s : x - y + 3 = 0$.

c. Risolvendo il sistema $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$ si ha $D = (-1, 2)$.