Prova scritta di GEOMETRIA		25 Marzo 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Sia dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentato dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Determinare gli autovalori e una base per ciascuno degli autospazi.

b. Determinare se f è semplice.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 17 punti

<table>
<tr><td colspan="2">Prova scritta di GEOMETRIA</td><td>25 Marzo 2010</td></tr>
<tr><td>Cognome:</td><td>Nome:</td><td>Matricola:</td></tr>
</table>

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Siano dati i punti $C = (2, 1), P = (4, 2)$. Determinare:

a. l'equazione della circonferenza Γ di centro C e passante per P.

b. l'equazione della retta s tangente a Γ in P.

c. dare una rappresentazione grafica accurata del problema.

Tempo suggerito: 15 minuti
Punteggio: 13 punti

SOLUZIONE 1:

a. L'equazione caratteristica è data da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2-1) = 0$$

da cui $\lambda_1 = 1, \mu_1 = 2; \lambda_2 = -1, \mu_2 = 1$.
Per determinare gli autospazi è sufficiente determinare $Ker(f-\lambda_1)$ e $Ker(f-\lambda_2)$.
Nel primo caso si considera il sistema omogeneo associato a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha soluzione $x_3 = 0, x_2 = t, x_1 = -t$, da cui $V_1 = \mathcal{L}((1,-1,0))$.
Nel secondo caso si considera il sistema omogeneo associato a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha soluzione $x_3 = 2t, x_2 = x_1 = -t$, da cui $V_{-1} = \mathcal{L}((1,1,-2))$.

b. Poichè la molteplicità algebrica degli autospazi non coincide con quella geometrica l'endomorfismo f non è semplice.

SOLUZIONE 2:

a. Il raggio è dato da $r = d(P,C) = \sqrt{(4-2)^2+(2-1)^2} = \sqrt{5}$, per cui l'equazione della circonferenza Γ di centro C è data da $(x-2)^2+(y-1)^2 = 5$.

b. l'equazione della retta s si ottiene da $(x-4)(2-4)+(y-2)(1-2) = 0 \rightarrow 2x+y-10 = 0$.

c.