Prova scritta di GEOMETRIA		22 Giugno 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Sia dato l'omomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ rappresentato, rispetto alle basi canoniche, dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Determinare una base per il nucleo.

b. Determinare una base per l'immagine.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 17 punti

Prova scritta di GEOMETRIA		22 Giugno 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Siano dati i punti $A = (3, -1), B = (5, 3)$. Determinare:

a. l'equazione della retta r passante per A e B.

b. l'equazione della retta s perpendicolare a r passante per $P(2, 2)$.

c. l'area del triangolo individuato da s e dagli assi delle ascisse e delle ordinate.

d. completare con una rappresentazione grafica accurata del problema.

Tempo suggerito: 15 minuti
Punteggio: 13 punti

SOLUZIONE 1:

a. Riducendo la matrice col metodo di Gauss si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_3 \leftarrow R_3 - R_1}{\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema lineare omogeneo associato ha soluzioni del tipo $x_4 = s, x_3 = t, x_2 = \frac{s-t}{3}, x_1 = -s + \frac{s-t}{3}$, per cui una base del nucleo si ha ponendo, ad esempio, $s = 0, t = 3$ e $s = 3, t = 0$, da cui $Ker\ f = \mathcal{L}((-1,-1,3,0),(-2,1,0,3))$.

b. Le prime due colonne della matrice sono linearmente indipendenti per cui $Im\ f = \mathcal{L}((1,2,1),(-1,1,2))$.

SOLUZIONE 2:

a. Applicando la formula si ha:

$$r : \frac{3-x}{3-5} = \frac{-1-y}{-1-3} \longrightarrow r : 2x - y - 7 = 0$$

b. $u_r = n_s = (-1,-2)$. per cui:

$$s : -(x-2) - 2(y-2) = 0 \longrightarrow s : x + 2y - 6 = 0$$

c. Intersecando s con gli assi coordinati si ottengono i vertici $M = (6,0)$ e $N = (0,3)$, e il terzo vertice è O. I cateti misurano 6 e 3 rispettivamente, per cui l'area misura 9.

d.