Prova scritta di GEOMETRIA		7 Settembre 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Sia dato uno spazio vettoriale V avente base $B = \{b_1, b_2, b_3\}$.

a. Verificare che i vettori $v_1 = b_2 - b_3; v_2 = b_1 + b_2 + 2b_3; v_3 = 2b_1 - b_2$ formano una base B' per V.

b. Determinare le componenti del vettore $u = 2b_1 - b_2 + b_3$ rispetto alla base B'.

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 15 punti

Prova scritta di GEOMETRIA		7 Settembre 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Siano dati i punti $A(1,3)$ e $B(4,1)$. Determinare:

a. l'asse del segmento AB;

b. le coordinate del punto C che con A, B e l'origine forma un parallelogramma;

c. completare con una rappresentazione grafica accurata del problema.

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1:

a. E' sufficiente costruire la matrice che esprime i vettori v_1, v_2, v_3 in funzione dei vettori b_1, b_2, b_3 e verificare che è non singolare.
Riducendo la matrice col metodo di Gauss si ha:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + R_2]{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

che ha determinante non nullo.

b. Operando le precedenti operazioni sulla matrice con termini noti dati da $(2, -1, 1)$, si ottiene la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

che risolto fornisce $u = -\frac{3}{7}v_1 + \frac{2}{7}v_2 + \frac{6}{7}v_3$

SOLUZIONE 2:

a. Dalla definizione è necessario determinare il coefficiente angolare della retta passante per A e B:

$$\frac{3-1}{1-4} = -\frac{2}{3}$$

e il punto medio del segmento AB:

$$M = \left(\frac{5}{2}, 2\right)$$

L'asse ha equazione

$$y - 2 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$$

b. Ricordando la regola della somma di vettori si ha $OC = OA + OB$ da cui $C(5, 4)$. Analogamente si ottengono gli altri possibili punti C, rispettivamente di coordinate $(3, -2)$ e $(-2, 3)$

c.