Prova scritta di GEOMETRIA		24 Febbraio 2011
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Sia dato l'omomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ rappresentato, rispetto alle basi canoniche, dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

a. Determinare una base per il nucleo.

b. Determinare una base per l'immagine.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 17 punti

Prova scritta di GEOMETRIA		24 Febbraio 2011
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Discutere accuratamente tutte le affermazioni, riportando i calcoli essenziali sul foglio corrispondente. Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Siano dati i punti $A = (2, 4), B = (6, 2)$. Determinare:

a. l'equazione della retta r passante per A e B.

b. l'equazione della retta s asse del segmento AB.

c. completare con una rappresentazione grafica accurata del problema.

Tempo suggerito: 15 minuti
Punteggio: 13 punti

SOLUZIONE 1:

a. Riducendo la matrice col metodo di Gauss si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3+R_1]{R_2 \leftarrow R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema lineare omogeneo associato ha soluzioni del tipo $x_4 = t, x_3 = s, x_2 = 2t, x_1 = -s-5t$, per cui una base del nucleo si ha ponendo, ad esempio, $s = 0, t = 1$ e $s = 1, t = 0$, da cui $Ker\ f = \mathcal{L}((-5, 2, 0, 1), (-1, 0, 1, 0))$.

b. Le prime due colonne della matrice sono linearmente indipendenti per cui $Im\ f = \mathcal{L}((1, 2, -1), (1, 1, 0))$.

SOLUZIONE 2:

a. Applicando la formula si ha:

$$r : \frac{2-x}{2-6} = \frac{4-y}{4-2} \longrightarrow r : x + 2y - 10 = 0$$

b. Il punto medio è $M = (4, 3)$ e $u_r = n_s = (2, -1)$ per cui:

$$s : 2(x-4) - (y-3) = 0 \longrightarrow s : 2x - y - 5 = 0$$

c.