| Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$ | | 27 Marzo 2013 |
| --- | --- | --- |
| Cognome: | Nome: | Matricola: |

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

## Esercizio 1

Risolvere con il metodo di Gauss il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

*Tempo suggerito: 20 minuti*
*Punteggio: 15 punti*

| Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$ | | 27 Marzo 2013 |
|---|---|---|
| Cognome: | Nome: | Matricola: |

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

## Esercizio 2

Sia dato lo spazio vettoriale $V$ delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali, con le usuali operazioni di somma e prodotto. Dire se:

a. Il sottoinsieme $W_1$ delle matrici che hanno l'elemento $a_{1,1} = 1$ è un sottospazio vettoriale di $V$.

b. Il sottoinsieme $W_2$ delle matrici che hanno le righe uguali è un sottospazio vettoriale di $V$.

*Tempo suggerito: 20 minuti*
*Punteggio: 15 punti*

SOLUZIONE 1:
Applicando il metodo di Gauss alla matrice completa $(A, b)$ si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1]{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

A ritroso si ricava $x_3 = \dfrac{-1}{3} = -\dfrac{1}{3}$; $x_2 = \dfrac{-4 - 2x_3}{-3} = \dfrac{10}{9}$; $x_1 = 3 + x_3 - 2x_2 = \dfrac{4}{9}$

SOLUZIONE 2:

a. NO, ad esempio perché $W_1$ non contiene la matrice nulla, oppure perché sommando due matrici si ha $a_{1,1} + a'_{1,1} = 2$, oppure perché moltiplicando una matrice per lo scalare $\lambda \neq 1$ si ha $\lambda a_{1,1} \neq 1$.

b. SI, perché $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ a + a' & b + b' \end{pmatrix}$ e $\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix}$.