Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		22 Aprile 2013
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Sia dato l'omomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ rappresentato, rispetto alle basi canoniche, dalla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

a. Determinare una base per il nucleo.

b. Determinare una base per l'immagine.

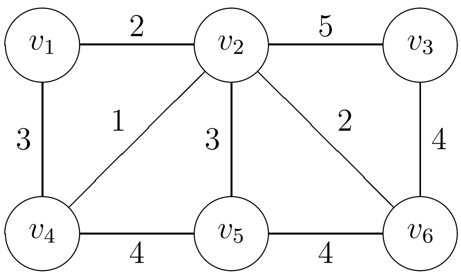
Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 15 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		22 Aprile 2013
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Si consideri il seguente grafo non orientato, in cui i numeri indicano il costo degli archi:



Determinare uno spanning tree di costo minimo con l'algoritmo di Prim, partendo dal nodo v_1.

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1:

a. Applicando il metodo di Gauss alla matrice data si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A ritroso si ricava $x_4 = t; x_3 = s; x_2 = \dfrac{s-2t}{2}; x_1 = \dfrac{-s-4t}{2}$; assegnando valori linearmente indipendenti ai parametri, ad esempio $s = 2, t = 0$ e $s = 0, t = 1$ si ottiene che $Ker(f) = \mathcal{L}((-1, 1, 2, 0), (-2, -1, 0, 1))$.

b. Le prime due colonne della matrice sono linearmente indipendenti, per cui $Im(f) = \mathcal{L}((1, -2, 1), (-1, 4, -5))$.

SOLUZIONE 2:
Iterativamente, si aggiungono gli archi $(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_2, v_6), (v_2, v_5), (v_6, v_3)$.