

Prova scritta di <i>MATEMATICA II</i>		17 Luglio 2013
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Determinare il rango della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 8 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Tempo suggerito: 20 minuti

Punteggio: 15 punti

Prova scritta di <i>MATEMATICA II</i>		20 Maggio 2013
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Risolvere la seguente equazione differenziale a variabili separabili del primo ordine:

$$y'(x) = x(1 + y^2(x))$$

con la condizione iniziale $y(\sqrt{\pi}) = 0$.

Tempo suggerito: 20 minuti

Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1: Applicando il metodo di Gauss si ha:

$$\left(\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 8 & -2 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \\ \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_1} \\ \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 + R_1} \\ \xrightarrow{R_5 \leftarrow R_5 - R_1} \end{array} \left(\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \\ \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 2R_2} \\ \xrightarrow{R_5 \leftarrow R_5 - R_2} \end{array} \left(\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

SOLUZIONE 2:

L'equazione si può riscrivere come $\frac{y'(x)}{1+y^2(x)} = x$, da cui con il cambio di variabile $z = y(s)$ e ricordando la condizione iniziale si ottiene:

$$\int_0^{y(x)} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{\sqrt{\pi}}^x s ds$$

da cui

$$[\arctg z]_0^{y(x)} = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\sqrt{\pi}}^x \longrightarrow \arctg y(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2}$$

ed esplicitando

$$y(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2} \right)$$