Prova parziale di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		22 Maggio 2014
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Determinare gli autovalori di f.

b. Determinare gli autospazi associati agli autovalori.

c. Dire se l'endomorfismo è semplice, giustificando la risposta.

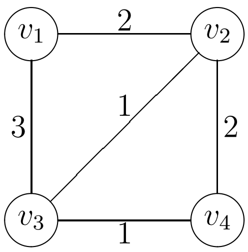
Tempo suggerito: 30 minuti
Punteggio: 20 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		22 Maggio 2014
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Sia dato il seguente grafo pesato non orientato, dove i numeri accanto agli archi indicano il peso:



Determinare un albero di peso minimo, usando l'algoritmo di Prim, iniziando dal nodo v_1.

Tempo suggerito: 15 minuti
Punteggio: 13 punti

SOLUZIONE 1:

a. Il polinomio caratteristico è dato dal determinare della matrice:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

che risulta $-\lambda(3-\lambda)^2$, le cui radici sono $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = \lambda_3 = 3$ e sono gli autovalori cercati.

b. Per determinare l'autospazio V_0 associato a λ_1 è sufficiente trovare il nucleo dell'endomorfismo associato alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui risulta $V_0 = \mathcal{L}((1, -3, 3))$.
Per determinare l'autospazio V_3 associato a $\lambda_2 = \lambda_3$ è sufficiente trovare il nucleo dell'endomorfismo associato alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

da cui risulta $V_3 = \mathcal{L}((1, 0, 0))$.

c. L'endomorfismo non è semplice, poiché la molteplicità geometrica dell'autovalore 3 è minore della sua molteplicità algebrica.

SOLUZIONE 2:
Applicando l'algoritmo richiesto si ha:

0 $A' = \emptyset; N' = \{v_1\}$

I $A' = \{a_{12}\}; N' = \{v_1, v_2\}$

II $A' = \{a_{12}, a_{23}\}; N' = \{v_1, v_2, v_3\}$

III $A' = \{a_{12}, a_{23}, a_{34}\}; N' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$; STOP $(N' = N)$