| **Prova di** $\mathcal{MATEMATICA\ II}$ | | 24 Giugno 2014 |
| --- | --- | --- |
| Cognome: | Nome: | Matricola: |

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

☐ Chi fa la terza prova parziale deve svolgere gli esercizi 1 e 2, che valgono rispettivamente 20 e 10 punti, nel tempo di 40 minuti.

☐ Chi fa la prova completa deve svolgere gli esercizi 1, 3 e 4, che valgono rispettivamente 12, 8 e 10 punti, nel tempo di 60 minuti.

## Esercizio 1

Si consideri l'integrale $\int\int_D xy^2 dxdy$, dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x + 1\}$.

a. Disegnare accuratamente il dominio $D$.

b. Calcolare l'integrale.

*Tempo suggerito: 25 minuti*

## Esercizio 2

Si consideri la funzione $f(x, y) = y\ lg\ x$.

a. Determinare il dominio di $f(x, y)$.

b. Calcolare la matrice hessiana in $P_0 = (1, 1)$.

*Tempo suggerito: 15 minuti*

## Esercizio 3

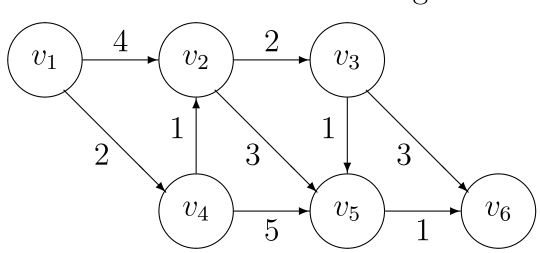
Risolvere il seguente sistema lineare con il metodo di riduzione di Gauss:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

*Tempo suggerito: 15 minuti*

## Esercizio 4

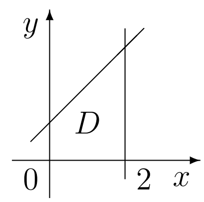
Si consideri il seguente grafo, in cui i numeri indicano la lunghezza degli archi:




Determinare i cammini minimi da $v_1$ agli altri nodi con l'algoritmo di Dijkstra.
*Tempo suggerito: 20 minuti*

SOLUZIONE 1:

a.




b. Il dominio è $y$-semplice, per cui si ha:

$$\int\int_D xy^2 dxdy = \int_0^2 \left( \int_0^{x+1} xy^2 dy \right) dx = \int_0^2 x \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^{x+1} dx = \frac{1}{3} \int_0^2 x(x+1)^3 dx =$$

$$\frac{1}{3} \left[ \frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{3} \left( \frac{142}{5} \right) = \frac{142}{15}$$

SOLUZIONE 2:

a. $f(x,y)$ è definita per $x \in ]0,+\infty[, y \in ]-\infty,+\infty[$.

b. Le derivate parziali sono $f_x = \frac{y}{x}; f_y = lg\ x$; le derivate seconde sono parziali $f_{xx} = -\frac{y}{x^2}; f_{xy} = f_{yx} = \frac{1}{x}; f_{yy} = 0$.
La matrice hessiana è $M(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

SOLUZIONE 3:
Applicando il metodo di Gauss alla matrice completa si ha:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Poiché l'ultima equazione è impossibile, il sistema non è compatibile.

SOLUZIONE 4:
Applicando l'algoritmo richiesto si ha:

| $d$ | | | | | | | $p$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | *esatta* | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ |
| 0 | 99 | 99 | 99 | 99 | 99 | $h=1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 4 | 99 | 2 | 99 | 99 | $h=4$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 3 | 99 | 2 | 7 | 99 | $h=2$ | 1 | 4 | 1 | 1 | 4 | 1 |
| 0 | 3 | 5 | 2 | 6 | 99 | $h=3$ | 1 | 4 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 0 | 3 | 5 | 2 | 6 | 8 | $h=5$ | 1 | 4 | 2 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 3 | 5 | 2 | 6 | 7 | $h=6$ | 1 | 4 | 2 | 1 | 2 | 5 |
| *STOP* | | | | | | | | | | | | |