Prova parziale di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		15 Aprile 2015
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Sia data la base $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ di uno spazio vettoriale V definito sul campo $\mathbb{R}$.

a. Verificare che i tre vettori di componenti nella base B rispettivamente $v_1 = (1, 3, 2), v_2 = (3, 10, 5), v_3 = (1, 2, 1)$ formano una base B'.

b. Esprimere il vettore di componenti nella base B $u = (1, 0, 1)$ in funzione della base B'.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 18 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		15 Aprile 2015
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Sia dato lo spazio vettoriale V delle matrici 2×2 definito sul campo $\mathbb{R}$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

a. Il sottoinsieme $H \subseteq V$ delle matrici aventi determinante uguale a 0 costituisce un sottospazio vettoriale?

b. Il sottoinsieme $K \subseteq V$ delle matrici aventi determinante uguale a 1 costituisce un sottospazio vettoriale?

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1:

a. La matrice avente come colonne le componenti dei vettori v_1, v_2, v_3 deve avere determinante non nullo. Applicando il metodo di Gauss si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante uguale a -2.

b. E' necessario determinare i coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ che risolvono la relazione $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = u$. E' sufficiente ripetere le stesse operazioni elementari sulle componenti del vettore u, ottenendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

che a ritroso fornisce $\lambda_3 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$.

SOLUZIONE 2:

a. NO. Infatti le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hanno determinante nullo, ma la matrice somma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante uguale a 1.

b. NO. Infatti la matrice nulla non ha determinante uguale a 1.