Prova parziale di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		14 Maggio 2015
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Dato lo spazio vettoriale U delle matrici simmetriche 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, si consideri l'applicazione $f : U \to \mathbb{R}^2$ definita da:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) = (a + b, b + c)$$

a. Verificare che f è un omomorfismo.

b. Determinare la matrice associata ad f.

c. Determinare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f.

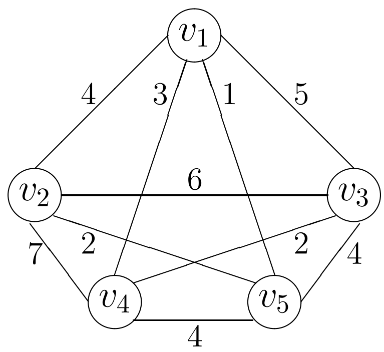
Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 18 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		14 Maggio 2015
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Si consideri il grafo non orientato (i numeri vicino agli archi indicano il costo):



Determinare un albero ricoprente di costo minimo, con l'algoritmo di Prim, a partire dal nodo v_1.

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1:

a. E' sufficiente verificare che f conserva la somma di matrici di U e il prodotto tra uno scalare e una matrice di U.

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\right) = (a+b, b+c) + (e+f, f+g) = (a+b+e+f, b+c+f+g) =$$

$$= f\left(\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ b+f & c+g \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\right)$$

$$\lambda f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) = \lambda(a+b, b+c) = (\lambda a + \lambda b, \lambda b + \lambda c) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda c \end{pmatrix}\right) = f\left(\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right)$$

b. Una possibile base è data da:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Rispetto a $\mathcal{B}$ si ottiene la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c. La matrice A è già ridotta, per cui si ha:

$$Ker\ f = \mathcal{L}((1,-1,1)); Im\ f = \mathcal{L}((1,0),(1,1))$$

SOLUZIONE 2:

L'algoritmo genera i seguenti alberi:

0 $A' = \emptyset; N' = \{v_1\}$

I $A' = \{a_{15}\}; N' = \{v_1, v_5\}$

II $A' = \{a_{15}, a_{25}\}; N' = \{v_1, v_5, v_2\}$

III $A' = \{a_{15}, a_{25}, a_{14}\}; N' = \{v_1, v_5, v_2, v_4\}$

IV $A' = \{a_{15}, a_{25}, a_{14}, a_{34}\}; N' = \{v_1, v_2, v_5, v_4, v_3\}$; STOP $(N' = N)$