Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		23 Giugno 2015
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

VALIDO PER LA PROVA PARZIALE E PER LA PROVA GLOBALE

Calcolare l'integrale doppio della funzione $f(x, y) = xy$ sul dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x + 1\}$$

Completare col grafico del dominio D.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 15 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		23 Giugno 2015
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

VALIDO SOLO PER LA PROVA PARZIALE

Determinare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^4}$$

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 18 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		23 Giugno 2015
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 3

VALIDO SOLO PER LA PROVA GLOBALE

Sia dato l'omomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ associato alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

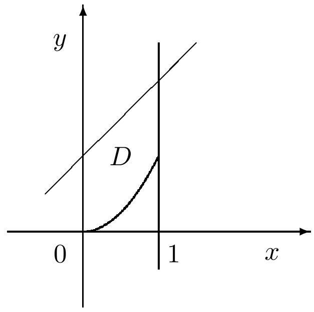
Determinare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1:

$$\int_0^1 \left(x \int_{x^2}^{x+1} y dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{x+1} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (-x^5 + x^3 + 2x^2 + x) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{8}$$



SOLUZIONE 2:

Lungo la retta $x = 0$ il limite è 1, mentre lungo la retta $x = y$ il limite è 0, per cui il limite non esiste.

SOLUZIONE 3:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A ritroso si ottiene $x_4 = s; x_3 = t; x_2 = \dfrac{-s}{3}; x_1 = \dfrac{5s - 3t}{6}$ da cui:

$$Ker(f) = \mathcal{L}\left(\left(-\frac{1}{2}, 0, 1, 0\right), \left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, 0, 1\right)\right)$$

$$Im(f) = \mathcal{L}\left((2, 2, -2), (-1, 2, 4)\right)$$