Prova di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		04 Settembre 2015
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Sia dato l'omomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ associato alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 16 punti

Prova di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		04 Settembre 2015
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 3x^2y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 14 punti

SOLUZIONE 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A ritroso si ottiene $x_4 = s; x_3 = t; x_2 = s; x_1 = -3s - t$ da cui:

$$Ker(f) = \mathcal{L}\left((-3, 1, 0, 1), (-1, 0, 1, 0)\right)$$

$$Im(f) = \mathcal{L}\left((1, 2, 1), (2, 3, 5)\right)$$

SOLUZIONE 2:
Separando le variabili si ha, per $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y^2} = 3x^2 dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int 3x^2 dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x^3 + c \Rightarrow y = -\frac{1}{x^3 + c}$$

La costante c si determina dalle condizioni iniziali:

$$1 = -\frac{1}{1 + c} \Rightarrow c = -2$$

da cui:

$$y = -\frac{1}{x^3 - 2}, x \neq \sqrt[3]{2}$$

$y = 0$ soddisfa l'equazione, ma non le condizioni iniziali.