Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		25 Settembre 2015
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Determinare una base per ciascun autospazio dell'endomorfismo associato alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 18 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		25 Settembre 2015
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Dato lo spazio vettoriale U delle matrici 2×3 a coefficienti in $\mathbb{R}$, aventi le righe uguali, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, si consideri l'applicazione $f : U \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}\right) = (a, a, a)$$

a. Verificare che f è un omomorfismo.

b. Determinare la matrice associata ad f.

c. Determinare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 18 punti

SOLUZIONE 1:
Per determinare gli autovalori serve il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Sviluppando rispetto alla seconda riga si ha $-(1-\lambda)((2-\lambda)(1-\lambda)-2) = -(1-\lambda)(-3\lambda+\lambda^2) = \lambda(1-\lambda)(3-\lambda)$ da cui si ottiene $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = 3$ e quindi

λ_1

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

A ritroso si ha $x_3 = s; x_2 = 0; x_1 = s$ e quindi $V_0 = \mathcal{L}(1,0,1)$

λ_2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A ritroso si ha $x_3 = s; x_2 = \frac{2}{3}s; x_1 = \frac{4}{3}s$ e quindi $V_1 = \mathcal{L}(4,2,3)$

λ_3

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A ritroso si ha $x_3 = s; x_2 = 0; x_1 = -2s$ e quindi $V_3 = \mathcal{L}(2,0,-1)$

SOLUZIONE 2:

a. E' sufficiente verificare che f conserva la somma di matrici di U e il prodotto tra uno scalare e una matrice di U.

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} e & f & g \\ e & f & g \end{pmatrix}\right) = (a,a,a)+(e,e,e) = (a+e,a+e,a+e) =$$

$$= f\left(\begin{pmatrix} a+e & b+f & c+g \\ a+e & b+f & c+g \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f & g \\ e & f & g \end{pmatrix}\right)$$

$$\lambda f\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}\right) = \lambda(a,a,a) = (\lambda a, \lambda a, \lambda a) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \end{pmatrix}\right) = f\left(\lambda\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}\right)$$

b. Una possibile base è data da:

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Rispetto a $\mathcal{B}$ si ottiene la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. La matrice ridotta associata ad A è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che a ritroso ha soluzioni $x_3 = s; x_2 = t; x_1 = 0$, per cui si ha:

$$Ker\ f = \mathcal{L}((0,1,0),(0,0,1)); Im\ f = \mathcal{L}((1,1,1))$$