Prova di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		01 Marzo 2016
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Sia data la base $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ di uno spazio vettoriale V definito sul campo $\mathbb{R}$.

a. Verificare che i tre vettori di componenti nella base B rispettivamente $v_1 = (1, 2, -1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (2, 4, -3)$ formano una base B'.

b. Esprimere il vettore $u = (1, 0, -2)$ rispetto alla base B in funzione della base B'.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 16 punti

Prova di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		01 Marzo 2016
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Verificare che il limite di $f(x,y) = \dfrac{x^3 - 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$ nell'origine non esiste.

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 14 punti

SOLUZIONE 1:

a. La matrice avente come colonne le componenti dei vettori v_1, v_2, v_3 deve avere determinante non nullo. Applicando il metodo di Gauss si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha determinante uguale a -1.

b. E' necessario determinare i coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ che risolvono la relazione $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = u$. E' sufficiente ripetere le stesse operazioni elementari sulle componenti del vettore u, ottenendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

che a ritroso fornisce $\lambda_3 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$.

SOLUZIONE 2:

Studiando il limite lungo la retta $y = 0$ si ottiene

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$$

mentre lungo la retta $y = x$ si ottiene

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 2x^2 + x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$